INSTITUT DE MATHEMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

UNIVERSITE D'ABOMEY CALAVI
(BENIN)

THE **ABDUS SALAM** INTERNATIONAL CENTER FOR THEORETICAL PYSICS (ITALY)

MÉMOIRE DE MASTER 2 :
Mathématiques fondamentales

SPÉCIALITÉ
Équations aux Dérivées Partielles (EDP)

THÈME

MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DE TRANSPORT AVEC UN CHAMP DE VECTEURS DANS UN ESPACE DE SOBOLEV

Superviseur :

Prof. Nicolas DEPAUW
Université de Nantes
nicolas.depauw@univ-nantes.fr
Laboratoire Jean Leray (France)

Soutenu par
Enagnon David LASSOUNON
davidolassounon@gmail.com
26 août 2020

Président du jury : **Marcos Aboubacar**
Membre du jury : **Leadi Liamidi**
Membre du jury : **Guy Degla**

davidolassounon@gmail.com

Année Académique
2019-2020

DEDICACES

À ma mère Albertine OGOUGBE,
à mon père Lucien LASSOUNON,
et à toute la communauté des Équations aux Dérivées Partielles du Bénin.

REMERCIEMENTS

Je remercie DIEU avant tout,
pour m'avoir donné la force et le courage d'accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire le Professeur Nicolas DEPAUW qui a bien voulu m'accorder sa confiance en me permettant de travailler sur ce thème. Sa rigueur de travail et son soutien m'ont été de précieux atouts dans l'exécution de ce travail.

Je tiens à exprimer également, toute ma reconnaissance au Professeur Liamidi Arèmou LEADI, pour sa disponibilité et ses apports tout au long de ce travail. Ses précieux conseils, m'ont permis d'améliorer la qualité de ce travail.

Mes profondes gratitudes vont à l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP), l'établissement qui m'a servi de cadre adéquat pendant ces deux ans d'études de Master. Je remercie le Directeur, Professeur Léonard TODJIHOUNDE, le Directeur Adjoint, Professeur Carlos OGOUYANDJOU, les enseignants missionnaires comme locaux ainsi que tout le personnel administratif de l'Institut.

Je tiens à dire merci au projet Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications (CEA-SMA) pour ces financements durant mes deux années de formation et pour tous les missionnaires que les dirigeants de ce projet font venir chaque année en plus des enseignants locaux pour la diversité et la meilleure qualité de notre formation. Je remercie également le coordonnateur de ce projet à l'IMSP, Professeur joël TOSSA.

Je tiens à dire merci à tout le personnel de l'institut pour leurs efforts afin d'assurer une bonne rentrée à chaque année académique.

J'exprime ma gratitude à mon père Lucien LASSOUNON, à ma mère Albertine OGOUGBE, de même qu'à ma fiancée Dorcas WACHINOU ainsi qu'à tous les membres de la famille. Votre soutien et vos encouragements sont à la base de mes accomplissements.

Enfin mes remerciements vont également à l'endroit de tous mes amis, mes camarades de promotion ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Dans ce mémoire de Master 2, nous présentons les résultats de Modena, Sattig et Székelyhidi sur la non unicité pour l'équation de transport/conservation, lorsque le champ de vecteur a pourtant la régularité Sobolev. Ils sont obtenus par un argument proche de l'intégration convexe.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

$\mathbb{R}$		L'ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$		L'ensemble des entiers naturels
$C(E,F)$		L'espace des fonctions continues de l'espace topologique E vers l'espace topologique F
$X \hookrightarrow Y$		si $X \subset Y$ s'injecte continument
Ω		un sous ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$
$\partial_i u$	$=$	$u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \mathrm{div} = \mathrm{div}_x$
∇u	$=$	$(\partial_1 u, \ldots, \partial_d u)$
Δ	$=$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
$\mathrm{L}^p(\Omega)$		L'espace de Lebesgue des fonctions mésurables u : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

tel que $\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty$ si $1 \leq p < +\infty$

ou $\sup\limits_{x\in\Omega} ess|u(x)| < +\infty$ si $p = +\infty$ C'est un espace de Banach muni de la norme

$$||u||_{\mathrm{L}^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < +\infty \\ \sup\limits_{x\in\Omega} ess|u(x)| < +\infty \text{ si } p = +\infty \end{cases}$$

,

$\mathrm{C}_c^k(\Omega)$		L'espace des fonctions continues et k fois différentiables sur Ω à support compact
$\mathscr{D}(\Omega)$	$=$	$C_c^{\infty}(\Omega)$, L'espace des fonctions qui sont infiniment différentiables à support compact da
$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$		L'espace des fonctions mesurables $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}($ ou $\Omega \longrightarrow \mathbb{C})$ tel que $u \in \mathrm{L}^p etD^{\alpha} u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ au sens de la distributions pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $\lvert\alpha\rvert \leq m$. C'est un espace de Banach muni de la norme $\lVert u\rVert_{\mathrm{W}^{m,p}} = \sum_{\lvert\alpha\rvert\leq m} \lVert D^{\alpha} u\rVert_{\mathrm{L}^p}$.
$\mathbb{T}^d$	:=	Le tore en dimension d avec d un entier plus grand que 2
$⨍_{\mathbb{T}^d} f(x)\mathrm{d}x$	:=	Valeur moyenne de f sur $\mathbb{T}^d$
$\mathrm{C}_0^{\infty}(\mathbb{T}^d)$	:=	$\{f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ lisse tel que $⨍_{\mathbb{T}^d} f(x)\mathrm{d}x = 0\}$
$\mathrm{B}V$	:	L'espace des fonctions L^1 à variation bornée
$\nabla^2 f$	:=	est la collection de $(\partial^{\alpha} f)_{\alpha}$ pour tout multi-indice α de longueur exactement 2
$\mathrm{C}_t\mathrm{L}_x^p$	:=	$\mathrm{C}([0,T],\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d))$
$\mathrm{L}^r\mathrm{L}_x^p$	:=	$\mathrm{L}^r((0,T),\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d))$
c-à-d	:=	C'est à dire

CHAPITRE 1
INTRODUCTION ET MOTIVATION

1.1 Introduction

Les EDP en général constituent l'un des domaines des mathématiques indispensables pour la compréhension et la prédiction de bon nombre de phénomènes physiques qui régissent notre vie. Son omniprésence dans la plupart des domaines scientifiques comme par exemple la physique, la chimie, la biologie, l'économie, la construction automobile pour ne citer que ceux-là en témoigne. L'article auquel nous nous intéressons traite de la non unicité de solutions de l'une des EDP les plus élémentaires utilisées qui est l'équation de transport donnée par :

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \tag{1.1}$$

avec condition initiale donnée par :

$$\rho(0, x) = \rho^0 \tag{1.2}$$

où $\rho : (0, T) \times \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une densité scalaire, $u : (0, T) \times \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteur donné et $\mathbb{T}^d$ est le tore de dimension d. Sauf indication contraire nous supposons que le champ de vecteur u est localement intégrable et incompressible c-à-d,

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{1.3}$$

au sens de la distribution. Sous cette condition, (1.1) est équivalent à l'équation de continuité ou de conservation

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \tag{1.4}$$

et cette équivalence est triviale car $\operatorname{div}(\rho u) = \rho \operatorname{div} u + u \cdot \nabla \rho$.

Il est bien connu que la théorie des solutions classiques de (1.1)-(1.2) est liée à l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \partial_t X(t, x) = u(t, X(t, x)) \\ X(0, x) = x \end{cases} \tag{1.5}$$

Plus précisement, si $(t, x) \mapsto u(t, x)$ est continue, et au moins lipschitz en x, alors d'après le théorème de Cauchy pour les EDO nous avons l'existence et l'unicité d'une solution de (1.1)-(1.2), caractérisée par la formule

$$\rho(t, X(t, x)) = \rho^0(x). \tag{1.6}$$

Il existe plusieurs modèles d'EDP, liés par exemple à la dynamique des fluides ou à la théorie des lois de conservation dans lesquelles il est nécessaire de traiter des champs de vecteurs qui ne sont pas du type lipschitz, mais dont la régularité est inférieure. Il est donc important d'étudier le caractère bien posé de (1.1)-(1.2) au sens faible, c'est-à-dire l'existence et unicité de solutions faibles.

Pour cela nous répondrons aux deux questions suivantes :

1. L'existence et unicité de solutions pour (1.1)-(1.2) tiennent-elles toujours dans la classe des densités
$$\rho \in \mathrm{L}_t^\infty \mathrm{L}_x^p \tag{1.7}$$
avec $p \in [1,+\infty]$ et p' son conjugué ($\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$) pour un champ de vecteurs donné
$$u \in \mathrm{L}_t^1 \mathrm{L}_x^{p'} \tag{1.8}$$
2. La relation (1.6) qui relie l'EDP (1.1) à l'EDO (1.5) est-elle toujours valide dans un sens faible ?

1.2 Motivation

Motivation du choix des classes de la densité ρ et du champ de vecteurs u. — Pour des solutions régulières à (1.1), la norme L_x^p de $\rho(t)$ reste constante dans le temps. Il est donc naturel de rechercher des densités solutions faibles dont la norme L^p, si elle n'est pas constante, reste au moins bornée uniformément en temps. De plus, pour que $\rho u \in \mathrm{L}^1(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$, le choix (1.8) de la classe de u est alors naturel. Par conséquent la notion de solutions distributions à (1.4) et donc à (1.1) est bien logique.

Caractère bien posé du problème de Cauchy (1.1)-(1.2)

Existence de solutions faibles. — L'existence de solution au sens de distribution est satisfaite par le théorème suivant

Théorème 1.2.1 (Existence)**.** *Pour toutes données $\rho^0 \in \mathrm{L}_x^p$ et $u \in \mathrm{L}_t^1\mathrm{L}_x^{p'}$, il existe au moins une solution faible $\rho \in \mathrm{L}_t^\infty\mathrm{L}_x^p$ de* (1.1)-(1.2).

Quelques résultats d'unicité de solutions. — Le premier résultat d'unicité est le célèbre théorème de DiPerna et Lions [DL89].

Théorème 1.2.2 (Unicité)**.** *Soit $p \in [1,+\infty]$, et $\rho^0 \in \mathrm{L}_x^p(\mathbb{R}^n)$. On suppose que* $\operatorname{div} u \in \mathrm{L}_t^1\mathrm{L}_x^\infty$ *et $u \in \mathrm{L}_t^1\mathrm{W}_{loc}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(1+\|x\|)^{-1} \in \mathrm{L}_t^1\mathrm{L}_x^1 + \mathrm{L}_t^1\mathrm{L}_x^\infty$. Alors il existe une unique solution ρ pour* (1.1)-(1.2) *dans $\mathrm{L}_t^\infty\mathrm{L}_x^p$ correspondant à la condition initiale ρ^0.*

Dans le contexte du tore $\mathbb{T}^d$ pour un champs de vecteurs à divergence nulle, ce théorème dit : Pour $p \in [1,+\infty]$, et $\rho^0 \in \mathrm{L}_t^\infty\mathrm{L}_x^p(\mathbb{T}^d)$, tel que $u \in \mathrm{L}_t^1\mathrm{W}^{1,p'}(\mathbb{T}^d)$. Alors il existe une unique solution ρ pour (1.1)-(1.2)dans $\mathrm{L}_t^\infty\mathrm{L}_x^p$ correspondant à la condition initiale ρ^0. Nous remarquons ici, qu'en plus de la relation (1.8) sur le champ de vecteur u s'ajoute la régularité de Sobolev
$$u \in \mathrm{L}_t^1\mathrm{W}^{1,p'}. \tag{1.9}$$

De plus ce théorème est vrai lorsque la condition d'incompressibilité (1.3) est remplacée par

$$\operatorname{div} u \in \mathrm{L}_t^1 \mathrm{L}_x^\infty. \tag{1.10}$$

En 2004, Ambrosio [Amb04] fait une extension de ce théorème d'unicité de DiPerna et Lions en montrant l'unicité de solution dans la classe des densités bornées ie ($p = \infty$) si

$$u \in \mathrm{L}_t^1 \mathrm{B}V_x \tag{1.11}$$

avec $\mathrm{B}V$ l'espace des fonctions à variation bornée. Également dans son théorème le caractère d'incompressibilité (1.3) est remplacée par (1.10).

Récemment, Bianchini et Bonicatto [BB17] ont fait également une extension du théorème d'unicité d'Ambrosio pour les champs de vecteurs vérifiant (1.11) et presque incompressibles.

La motivation du théorème principal de l'article. — La question est de savoir si en fixant $p > 1$ avons-nous l'unicité de solution dans la classe de densité $\rho \in \mathrm{L}_t^\infty \mathrm{L}_x^p$ et pour un champ de vecteur incompressible $u \in \mathrm{L}_t^1 \mathrm{W}_x^{1,\tilde{p}}$ lorsque $\tilde{p} < p'$? La réponse à cette question n'est pas triviale. Lorsque $\tilde{p} \geqslant p'$ alors la théorie de DiPerna et Lions garantit l'unicité de solution dans $\mathrm{L}_t^\infty \mathrm{L}_x^p$ par le théorème II.1 page 516 dans [DL89].

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS

La plupart des définitions et théorèmes dans cette partie sont tirées de [B]

2.1 Topologie faible, faible-* et convergence dans un espace de Banach

Soit X un $\mathbb{R}$-espace de Banach et X' son dual topologique(l'espace des formes linéaires continues sur X).

Définition 1. La topologie faible sur X est la topologie la moins fine telle que toutes les applications $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f \in X'$ soient continues.

Définition 2. Une suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers $u \in X$ et on note $u_n \rightharpoonup u$ lorsque pour tout $f \in X'$, $< f, u_n > \rightarrow < f, u >$

Proposition 2.1.1. *Toute suite faiblement convergente est bornée*

Définition 3. La topologie faible-* sur X' est la topologie la moins fine telle que toutes les applications $J_x : X' \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto < f, x >$ avec $x \in X$ soient continues

Définition 4. Une suite f_n converge vers f pour la topologie faible-* et on note $f_n \rightharpoonup^* f$, lorsque pour tout $x \in X$, $< f_n, x > \rightarrow < f, x >$

Proposition 2.1.2. *Toute suite faible-* convergente est bornée*

2.1.1 Convergence forte, faible, faible-* dans les espaces L^p

Proposition 2.1.3. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, alors on peut extraire de la suite $(u_n)_n$ une sous suite faiblement convergente c-à-d* $\exists (u_{nk})_k, \exists u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \forall \varphi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$, $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \int_\Omega u_{nk} \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega u \varphi \mathrm{d}x$

Définition 5. Un espace vectoriel normé est dit réflexif si l'injection naturelle dans son bidual topologique est surjective.

Théorème 2.1.4. *(Kakutani)*
La boule fermée unité est faiblement compacte si et seulement si l'espace est réflexif

Proposition 2.1.5. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, alors on peut extraire de la suite $(u_n)_n$ une sous suite faiblement-* convergente c-à-d* $\exists (u_{nk})_k, \exists u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \forall \varphi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$,
$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega u_{nk}\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x$

Théorème 2.1.6. *(Banach-Alaoglu)*
La boule fermée unité est faiblement $*$ compacte

Proposition 2.1.7. *Soient p, q, et r trois réels dans $[1,\infty)$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $(u_n)_n$ est une suite de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ qu converge faiblement vers u dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $(v_n)_n$ une suite de $\mathrm{L}^q(\Omega)$ qu converge fortement vers v dans $\mathrm{L}^q(\Omega)$, alors le suite produit $(u_n v_n)$ converge faiblement vers (uv) dans $\mathrm{L}^r(\Omega)$*

Théorème 2.1.8. *Pour tout $p \in [1,\infty)$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$*

Théorème 2.1.9. *Soit $\rho \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et η un noyau régularisant, c-à-d $\eta > 0, \mathrm{C}^\infty$, à support compact tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \eta = 1$ alors pour tout $\epsilon > 0$ la fonction $\rho_\epsilon = \rho * \eta_\epsilon$, avec $\eta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^d}\eta(x/\epsilon)$, est de classe C^∞ et converge dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ vers ρ. Si $\rho \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ on a la convergence de ρ_ϵ dans $\rho \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 6. (solution faible de (1.1)-(1.2))
On dit qu'une fonction $\rho \in \mathrm{L}^\infty_t \mathrm{L}^p_x$ est solution faible de (1.1)-(1.2) si pour toute fonction test $\phi \in C^1([0,T) \times \mathbb{T}^d)$ telle que $\phi(T) = 0$ on a :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \rho(\partial_t \phi + u \cdot \nabla\phi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{T}^d} \rho^0(x)\phi(0,.)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2.2 L'espace $BV(\Omega)$

Si $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ on sait que Du sa dérivée au sens des distributions est une mesure de Radon.

Définition 7. $BV(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $\mathrm{L}^1(\Omega)$ dont la dérivée est une mesure finie. En particulier, pour tout i et j, $|D_i u_j|(\Omega) < \infty$ et $V(u,\Omega) = |Du|(\Omega)$ est la variation de u

Remarque 2.2.1.
1. *L'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$ est inclus dans $\mathrm{B}V(\Omega)$, car $\forall u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$, la dérivée faible est donnée par ∇u et que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathrm{L}^1(\Omega)$*
2. *Cette inclusion est stricte par la fonction de Heaviside*
3. $(\mathrm{B}V(\Omega), \|, \|_{\mathrm{B}V})$ *est un espace de Banach pour la norme $\|u\|_{\mathrm{B}V} = \int_\Omega |u|\mathrm{d}x + |Du|(\Omega)$.*

2.3 Champ incompressible

Définition 8. En analyse vectorielle, un champ vectoriel incompressible est un champ dont la divergence est nulle.

Remarque 2.3.1. *L'incompressibilité fait référence à la conservation du volume. Si le champ considéré ρ représente la densité d'un fluide et u son champ de vitesse alors l'équation de conservation de la matière, qui en toute généralité est donnée par* (1.4)

2.4 Propriété de Dunford-Pettis

Théorème 2.4.1. *(Dunford-Pettis) Soit* Ω *un espace mesuré séparable et localement compact et* F *un sous ensemble borné de* $\mathrm{L}^1(\Omega)$. *Alors* F *est faiblement compact si et seulement si*

1. *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* A *de mesure* $|A| < \delta$, *pour tout* $f \in F$ *on ait* $\int_A |f| \leqslant \epsilon$.

2. *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un compact* $K \subset \Omega$ *tel que pour tout* $f \in F$ *on ait* $\int_{\Omega - K} |f| \leqslant \epsilon$

CHAPITRE 3

RÉSULTAT DE NON UNICITÉ

3.1 Énonce

Théorème 3.1.1. *Soit* $p \in [1, +\infty)$ *et* $\tilde{p} \in [1, +\infty)$ *tel que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} > 1 + \frac{1}{d}. \tag{3.1}$$

Alors il existe une infinité de champs de vecteurs incompressibles vérifiant $u \in \mathrm{C}_t \mathrm{L}_x^{p'} \cap \mathrm{C}_t \mathrm{W}_x^{1,\tilde{p}}$ *pour lesquels l'unicité des solutions distributionnelles pour l'équation de transport* (1.1)-(1.2) *échoue dans la classe des densités* $\rho \in \mathrm{C}_t \mathrm{L}_x^p$.

Si $p = 1$, $p' = \infty$ *alors on peut prendre* $u \in \mathrm{C}_{t,x} \cap \mathrm{C}_t \mathrm{W}_x^{1,\tilde{p}}$.

3.1.1 Commentaires

Le résultat reste vrai si l'équation de transport (1.1)-(1.2) est remplacée par l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = \Delta \rho \tag{3.2}$$

si l'on ajoute la contition $p' < d$.

1. Le cas $p = \infty$ corresponds au cas des densités bornées et nous avons une unicité de solutions pour les champs de vecteurs dans l'espace BV.
2. Similairement le cas $\tilde{p} = \infty$ n'est pas à considérer car il correspond où le champs de vecteur u est continu et lipschitzien et la théorie classique de Cauchy-Lipschitz pour l'EDO (5) assure l'unicité de solution de (1.1)-(1.2), par la formule (1.6).
3. Dans le cas $p = 1$, $p' = \infty$ nous avons $\tilde{p} < d$ et les champs de vecteurs construits sont bornés et $\rho \in \mathrm{C}_t \mathrm{L}_x^1$.
4. Recemment L. Caravenna et G. Crippa ont montré l'unicité d'un $\rho \in C_t \mathrm{L}^1$ pour un champ de vecteur $u \in C_t \mathrm{W}^{1,\tilde{p}}$ lorsque $\tilde{p} > d$.
5. La question reste encore ouverte de savoir si l'unicité de solution faible à (1.1)-(1.2)est valable lorsque le paramètre d'intégrabilité de sobolev $\tilde{p}$ de Du vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} \leq 1 + \frac{1}{d}$.

3.1.2 Énoncé auxiliaire

La preuve de cet théorème central utilise le théorème auxiliaire suivant.

Théorème 3.1.2 (Solution pour les champs de vecteurs de Sobolev). *Soit* $\epsilon > 0$, $\bar{\rho} \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{T}^d)$ *à moyenne nulle pour la variable d'espace (c-à-d* $\int_{\mathbb{T}^d} \bar{\rho}\, dx = 0$*) et* $\bar{u} \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d)$ *à divergence nulle. On définit l'ensemble* $E := \{t \in [0,T], \quad \partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}(\bar{\rho}\bar{u}) = 0 \text{ sur } \mathbb{T}^d\}$.

Soit p *et* q *dans* $[1,\infty)$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{d}$. *Alors il existe* $\rho : [0,T] \times \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $u : [0,T] \times \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *tel que :*

1. $\rho \in C([0,T], L^p(\mathbb{T}^d))$ *et* $u \in C([0,T], L^{p'}(\mathbb{T}^d)) \cap \bigcap_{\tilde{p}<q} C([0,T], W^{1,\tilde{p}}(\mathbb{T}^d))$. *Si* $p = 1$ *alors* u *est aussi continue :* $u \in C([0,T] \times \mathbb{T}^d)$.
2. (ρ, u) *est une solution faible de* (1.1)-(1.2).
3. $(\rho, u)(t) = (\bar{\rho}, \bar{u})(t)$ *pour tout* $t \in E$.
4. $\|\rho(t) - \bar{\rho}(t)\|_{L^p} < \epsilon$ *pour tout* $t \in [0,T]$, *ou bien* $\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L^{p'}} < \epsilon$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

Dans ce théorème important nous remarquons que les deux estimations du point 4 ne peuvent par se tenir simultanément. En effet une telle déclaration impliquerait que l'on peut construire une suite (ρ_n, u_n) solution faible à (1.1)-(1.2) telles que $(\rho_n, u_n, \rho_n u_n)$ converge vers $(\rho, u, \rho u)$ dans L^1 (car ρ_n converge vers ρ dans L^p, u_n converge vers u dans $L^{p'}$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) de sorte que nécessairement (ρ, u) soit aussi solution faible de (1.1)-(1.2).

3.1.3 Démonstration

preuve du Théorème 3.1.1. Soit $\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ à valeur moyenne nulle mais non identiquement nulle.

Soit $\chi : [0,T] \longrightarrow [0,1]$ une fonction lisse telle que

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in U \text{ voisinage de } 0, \\ 1 & \text{si } t \in V \text{ voisinage de } T. \end{cases}$$

Alors la fonction $\bar{\rho} : (t,x) \longmapsto \chi(t)\tilde{\rho}(x)$ est lisse et à valeur moyenne nulle pour tout t dans $[0,T]$.

En appliquant le théorème 3.1.2 à $\bar{\rho} = \chi\tilde{\rho}$ et $\bar{u} \equiv 0$ nous avons (ρ, u) solution de (1.1)-(1.2) avec les régularités voulues.

De plus, pour tout t dans $U \cup V$, l'équation de transport est résolue par $(\bar{\rho}, \bar{u}) = (\chi\tilde{\rho}, 0)$. Ces deux voisinages appartiennent à E car $\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}(\bar{\rho}\bar{u}) = 0$ sur U et sur V. De plus les valeurs initiales et finales sont maintenues car, par le point 3, on a $(\rho, u)(t) = (\chi\tilde{\rho}, 0)(t)$ et donc $\rho(0) = \chi(0)\tilde{\rho} = 0$ et $\rho(T) = \chi(T)\tilde{\rho} = \tilde{\rho}$. □

La preuve du théorème 3.1.2 est basée sur la technique d'intégration convexe qui consiste à construire une approximation de solution pour l'équation de continuité dans laquelle la limite faible est exacte mais seulement solution faible. Au cours de ces dernières années, l'intégration convexe a été appliquée avec beaucoup de succès sur l'équation d'Euler afin de prouver la conjecture d'Onsager.

3.2 Proposition principale et preuve du théorème 3.1.2

3.2.1 Proposition principale

Dans cette section nous énonçons la proposition principale, Proposition 3.2.1 ci-dessous, que nous allons utiliser pour prouver le théorème 3.1.2.

Pour simplifier, soit $p > 1$.

Nous utilisons l'équation que nous appelons équation de continuité-défaut définie par :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = -\operatorname{div}(R) \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans ce système, u désignera toujours un champ de vecteur à divergence nulle. En revanche, on veut corriger le $(\bar\rho, \bar u)$ initial qui ne vérifie pas l'équation de transport/conservation pour atteindre le (ρ, u) final qui la vérifie. Donc en cours de route, les (ρ, u) intermédiaires ne la vérifient pas. Mais on peut quand même calculer l'erreur $e := \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = \partial_t \rho + \operatorname{div}(u\rho)$, le *défaut*, de l'équation. Ce champ scalaire peut toujours s'écrire comme $\operatorname{div} R$ pour un certain champ de vecteur R bien choisi avec $R : [0, T] \times \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ lisse.

C'est une approximation de l'équation de transport et l'étape d'itération du schéma d'intégration convexe traite bien de la solution de ce système.

Proposition 3.2.1. *Il existe une constante $M > 0$ tel que pour tous p et $\tilde p$ dans $[1,\infty)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde p} > 1 + \frac{1}{d}$, pour tous δ et $\eta > 0$ et pour toute solution lisse (ρ_0, u_0, R_0) de (3.3) il existe une autre solution (ρ_1, u_1, R_1) vérifiant les estimations suivantes :*

1. $\|\rho_1(t) - \rho_0(t)\|_{L^p} \leqslant M\eta \|R_0(t)\|_{L^1}^{1/p}$,
2. $\|u_1(t) - u_0(t)\|_{L^{p'}} \leqslant M\eta^{-1} \|R_0(t)\|_{L^1}^{1/p'}$,
3. $\|u_1(t) - u_0(t)\|_{W^{1,\tilde p}} \leqslant \delta$,
4. $\|R_1(t)\|_{L^1} \leqslant \delta$,

pour tout $t \in [0, T]$.

D'après cette proposition, nous remarquons que les solutions à chaque étape itérative ne sont pas modifiées au cours du temps c-à-d si $R_0(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$, alors $(\rho_1, u_1) = (\rho_0, u_0)$ et on conclut que $R_0(t) = 0 = R_1(t)$ ainsi de suite.

La preuve du théorème 3.1.2 est assurée par la proposition 3.2.1.

Nous allons donc utiliser cette proposition 3.2.1 pour construire une suite (ρ_n, u_n, R_n) de solution de (3.3) dans la classe

$$C\Big([0, T], L^p(\mathbb{T}^d) \times \big(L^{p'} \cap W^{1,q}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d)\big) \times L^1(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d)\Big).$$

Preuve du théorème 3.1.2. Soit $(\rho_0, u_0) := (\bar\rho, \bar u)$ comme indiqué dans les hypothèses du théorème. On définit $R_0(t) = -\nabla\Delta^{-1}\big(\partial_t \bar\rho(t) + \operatorname{div}(\bar\rho(t)\bar u(t))\big)$. Alors :

$$-\operatorname{div} R_0 = \operatorname{div}\Big(\nabla\Delta^{-1}\big(\partial_t \bar\rho + \operatorname{div}(\bar\rho \bar u)\big)\Big) = \Delta\Delta^{-1}\big(\partial_t \bar\rho + \operatorname{div}(\bar\rho \bar u)\big) = \partial_t \bar\rho + \operatorname{div}(\bar\rho \bar u) = \partial_t \rho_0 + \operatorname{div}(\rho_0 u_0)$$

car $(\rho_0, u_0) := (\bar\rho, \bar u)$. Alors (ρ_0, u_0, R_0) est bien une solution lisse de (3.3).

Soit $\delta_0 := \|R_0\|_{L^1}$. On choisit une suite de nombres positifs $\delta_n > 0$ indexée par $n > 0$ telle que $\sum_n \delta_n^{1/2}$ converge. On choisit en outre une suite tel que $(\eta_n)_n \subset [1,\infty)$ et $\eta_n \delta_n^{1/p} = \sigma \delta_n^{1/2}$ pour un certain $\sigma > 0$ que nous choisirons plus tard.

De $\eta_n \delta_n^{1/p} = \sigma \delta_n^{1/2}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ il vient $\eta_n^{-1} \delta_n^{1/p'} = \sigma^{-1} \delta_n^{1/2}$.

Les fonctions ρ et u que nous cherchons sont les limites des suites ρ_n et u_n vérifiant toutes les estimations.

Pour $(\rho_0, u_0) := (\bar{\rho}, \bar{u})$ on applique la proposition 3.2.1, ce qui donne l'existence de (ρ_1, u_1, R_1) solution lisse vérifiant les estimations. Et après $(n-1)$ répétitions d'application de la proposition on construit ainsi une suite (ρ_n, u_n, R_n) solution lisse de (3.3) uniformément bornée en temps telles que, pour tout $t \in [0, T]$:

1. $\|\rho_{n+1}(t) - \rho_n(t)\|_{L^p} \leqslant M\eta_n \|R_n(t)\|_{L^1}^{1/p}$,
2. $\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_{L^{p'}} \leqslant M\eta_n^{-1} \|R_n(t)\|_{L^1}^{1/p'}$,
3. $\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} \leqslant \delta_{n+1}$,
4. $\|R_{n+1}(t)\|_{L^1} \leqslant \delta_{n+1}$,
5. $R_n(t) = 0, \forall t \in E$

De 1 : $\|\rho_{n+1}(t) - \rho_n(t)\|_{L^p} \leqslant M\eta_n \|R_n(t)\|_{L^1}^{1/p} = M\sigma\delta_n^{1/2}$. $(*)$

De 2 : $\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_{L^{p'}} \leqslant M\eta_n^{-1} \|R_n(t)\|_{L^1}^{1/p'} = M\sigma^{-1}\delta_n^{1/2}$.

Or $\sum_n \delta_n^{1/2} < \infty$. Donc les suites ρ_n et u_n sont de Cauchy respectivement dans $C_t L_x^p$ et $C_t L_x^{p'} \cap C_t W^{1,\tilde{p}}$, pour tout $\tilde{p} < p'$ et comme L^p et $L^{p'}$ sont des espaces de Banach, alors il existe des fonctions ρ et u telles que $\rho = \lim_n \rho_n$ dans $C_t L_x^p$ et $u = \lim_n u_n$ dans $C_t L_x^{p'} \cap C_t W_x^{1,\tilde{p}}$ pour tout $\tilde{p} < q$. Donc $\lim_n \rho_n u_n = \rho u$ dans L^1 car $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(ρ_n, u_n) est solution lisse de (3.3) et $R_n \longrightarrow 0$ dans $C_t L_x^1$, alors $\partial_t \rho_n + \operatorname{div}(\rho_n u_n) = -\operatorname{div} R_n$ et $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0$. (par passage à la limite)

Donc (ρ, u) est solution faible de (1.1)-(1.2) et 1 et 2 sont prouvés.
Montrons par récurrence sur n l'affirmation

$$\forall t \in E, \quad (\rho_n, u_n)(t) = (\bar{\rho}, \bar{u})(t) \text{ et } R_n(t) = 0.$$

Pour n=0,
$\forall t \in E, \quad (\rho_0, u_0)(t) := (\bar{\rho}, \bar{u})(t)$ et$R_0(t) = 0$.
Pour n=1,
d'après 1 et 2, pour les t pris dans E, $(\rho_1, u_1)(t) = (\rho_0, u_0)(t) := (\bar{\rho}, \bar{u})(t)$ car $R_0(t) = 0$.

$$\begin{aligned} R_1(t) &= -\nabla\Delta\Big(\partial_t \rho_1(t) + \operatorname{div}(\rho_1(t) u_1(t))\Big) \\ &= -\nabla\Delta\Big(\partial_t \bar{\rho}(t) + \operatorname{div}(\bar{\rho}(t)\bar{u}(t))\Big) \\ &= R_0(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Supposons que $\forall t \in E, \quad (\rho_n, u_n)(t) = (\bar{\rho}, \bar{u})(t)$ et $R_n(t) = 0$.
Alors d'après 1 et 2, $\rho_{n+1}(t) = \rho_n(t) = \bar{\rho}(t)$ et $u_{n+1}(t) = u_n(t) = \bar{u}(t)$ tout $t \in E$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} R_{n+1}(t) &= -\nabla\Delta\Big(\partial_t \rho_{n+1}(t) + \operatorname{div}(\rho_{n+1}(t) u_{n+1}(t))\Big) \\ &= -\nabla\Delta\Big(\partial_t \rho_n(t) + \operatorname{div}(\rho_n(t) u_n(t))\Big) \\ &= R_n(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc 3 est prouvé par passage à la limite.

Pour l'estimation 4, on choisit σ si petit que

$$M\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{1/2} < \epsilon,$$

ou bien σ si grand que

$$M\sigma^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n^{1/2} < \epsilon.$$

et on prends la somme sur n des deux estimations en (*)

Si $p = 1$ alors $p' = \infty$ et u est limite uniforme des u_n donc continue et bornée.

Ainsi s'achève la preuve du théorème 3.1.2 □

CHAPITRE 4

OUTILS TECHNIQUES

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques outils et estimations techniques utilisés.

4.1 Inégalité de Hölder pour les oscillations rapides

Lemme 4.1.1. *Pour tout $p \in [1, \infty]$, il existe une constante positive C_p tel que pour toutes fonctions lisses f et g sur $\mathbb{T}^d$ et pour $\lambda \in \mathbb{N}$:*

$$\Big| \|fg_\lambda\|_{\mathrm{L}^p} - \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^p} \Big| \leq \frac{C_p}{\lambda^{1/p}} \|f\|_{C^1}\|g\|_{\mathrm{L}^p} \tag{4.1}$$

(avec $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$)

Démonstration. Divisons le tore $\mathbb{T}^d$ en λ^d cubes $(Q_j)_j$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_j} |f|^p |g_\lambda|^p &= \int_{Q_j} \Big(|f(x)|^p - \fint_{Q_j} |f|^p \Big) |g_\lambda(x)|^p \, dx + \fint_{Q_j} |f|^p \int_{Q_j} |g_\lambda|^p \\
&= \int_{Q_j} \Big(|f(x)|^p - \fint_{Q_j} |f|^p \Big) |g_\lambda(x)|^p \, dx + \frac{1}{\lambda^d} \fint_{Q_j} |f|^p \, dy \int_{\mathbb{T}^d} |g_\lambda|^p \\
&= \int_{Q_j} \Big(|f(x)|^p - \fint_{Q_j} |f|^p \Big) |g_\lambda(x)|^p \, dx + \int_{Q_j} |f|^p \int_{\mathbb{T}^d} |g_\lambda|^p \, dx \\
&\text{(car } |Q_j| = \frac{1}{\lambda^d}\text{).}
\end{aligned}$$

En prenant la somme sur j membre à membre on a

$$\|fg_\lambda\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} = \|f\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} \|g\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} + \sum_j \int_{Q_j} \Big(|f(x)|^p - \fint_{Q_j} |f|^p \Big) |g_\lambda(x)|^p \, dx.$$

Pour tout x et y pris dans Q_j on a :

$$\Big| |f(x)|^p - |f(y)|^p \Big| \leq \frac{C_p}{\lambda} \|f\|^{p-1}_{C^0(\mathbb{T}^d)} \|\nabla f\|_{C^0(\mathbb{T}^d)} \leq \frac{C_p}{\lambda} \|f\|^p_{C^1(\mathbb{T}^d)}.$$

On en déduit

$$\sum_j \int_{Q_j} \Big(|f(x)|^p - \fint_{Q_j} |f|^p\Big)|g_\lambda(x)|^p\,dx \leq \frac{C_p}{\lambda}\|f\|^p_{C^1(\mathbb{T}^d)} \sum_j \int_{Q_j} |g_\lambda(x)|^p\,dx$$
$$= \frac{C_p}{\lambda}\|f\|^p_{C^1(\mathbb{T}^d)}\|g_\lambda\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)}$$
$$= \frac{C_p}{\lambda}\|f\|^p_{C^1(\mathbb{T}^d)}\|g\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)},$$

donc

$$\Big|\|fg_\lambda\|^p_{\mathrm{L}^p} - \|f\|^p_{\mathrm{L}^p}\|g\|^p_{\mathrm{L}^p}\Big| \leq \frac{C_p}{\lambda}\|f\|^p_{C^1}\|g\|^p_{\mathrm{L}^p}.$$

Or pour tout A, B positifs, $|A-B|^p \leq \big||A|^p - |B|^p\big|$. Ainsi en prenant $A = \|fg_\lambda\|_{\mathrm{L}^p}$ et $B = \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^p}$ on a le résultat. □

Remarque 4.1.2. *De cette inégalité on a :*

$$\|fg_\lambda\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)}\|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} + \frac{C_p}{\lambda^{1/p}}\|f\|_{C^1(\mathbb{T}^d)}\|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)}$$

qui permet de lier le produit fg_λ par la norme $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)$ des fonctions f et g plus le terme d'erreur qui est petit si une fonction oscille très rapidement c-à-d si $\lambda \to \infty$ avec λ le paramètre qui contrôle l'oscillation.

4.1.1 Dérivées et anti-dérivées d'ordre supérieur

Pour une fonction f lisse, tel que $\fint_{\mathbb{T}^d} f = 0$, l'équation de Poisson $\Delta u = f$ admet une solution unique sur $\mathbb{T}^d$, notée $u = \Delta^{-1} f$.

Le laplacien inverse est l'opérateur

$$\Delta^{-1} : C_0^\infty \longrightarrow C_0^\infty,$$
$$f \longmapsto u,$$

avec C_0^∞ l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ à moyenne nulle c-à-d telles que $\fint_{\mathbb{T}^d} f = 0$. L'opérateur Δ^{-1} est bien défini comme un opérateur sur l'espace C_0^∞ car l'équation de poisson admet une solution unique sur C_0^∞.

Nous allons l'utiliser pour définir les plus grands ordres de dérivation ou anti-dérivation par une structure simple.

Définition 9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur différentiel par

$$D^k f = \begin{cases} \Delta^{k/2} f, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \nabla\Delta^{(k-1)/2} f & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

pour toute $f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$.Par convention $D^0 = Id$ (0 étant pair).

Pour les k négatifs, la définition est la même si on ajoute $f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$ car Δ^{-1} est bien défini sur $C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$.

Remarque 4.1.3. *Nous avons quelques propriétés de D^k.*

1. $D^{-1} = \nabla\Delta^{-1}$

2. *Pour $k \in \mathbb{Z}$ impair, $D^k f$ est à valeur dans $\mathbb{R}^d$, et pour $k \in \mathbb{Z}$ pair, $D^k f$ est à valeur dans $\mathbb{R}$.*
3. *$D^{n+m} = D^n \cdot D^m$ avec «·» désignant, selon la parité de n et m soit le produit de deux scalaires (si n et$m$ sont pairs), soit le produit d'un scalaire et d'un vecteur (si l'un est pair et l'autre impair), soit le produit scalaire de deux vecteurs (si les deux puissances n et m sont impairs).*
4. *Pour tout k, n, m dans $\mathbb{Z}$ et f, g dans $C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$ on a $\int_{\mathbb{T}^d} D^k f \cdot D^{m+n} g = (-1)^n \int_{\mathbb{T}^d} D^{k+n} f \cdot D^m g$,*
5. *D^k commute par dérivation multi-indice c-à-d $\partial^\alpha D^k f = D^k \partial^\alpha f$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout multi-indice α.*
6. *Pour tout k dans $\mathbb{Z}$ et λ dans $\mathbb{N}$, $D^k u_\lambda = \lambda^k (D^k u)_\lambda$.*

4.1.2 L'estimation de Calderon-Zygmund

Théorème 4.1.4. *Soit $p \in (1, \infty)$. Alors il existe une constante positive $C_{d,p}$ tel que pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact on a*

$$\|\nabla^2 f\|_{\mathrm{L}^p} \leq C_{d,p} \|\Delta f\|_{\mathrm{L}^p} \tag{4.2}$$

où $\nabla^2 f$ est la collection $(\partial^\alpha f)_\alpha$ pour les multi-indices α de longueur exactement 2, avec $\|\nabla^2 f\|_{\mathrm{L}^p} = \left(\sum_\alpha \|\partial^\alpha f\|_{\mathrm{L}^p}^p\right)^{1/p}$.

Démonstration. Pour $p = 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2 f\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \sum_\alpha \|\partial^\alpha f\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\
&= \sum_\alpha \|\mathscr{F}(\partial^\alpha f)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \text{ d'après le théorème de parceval-Plancherel} \\
&= \sum_\alpha \|(2i\pi)^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathscr{F}(f)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\
&\leq \sum_\alpha \|(2i\pi)^2 |\xi|^2 \mathscr{F}(f)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\
&\leq \sum_\alpha \|-4\pi^2 |\xi|^2 \mathscr{F}(f)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\
&\leq \sum_\alpha \|\mathscr{F}(\Delta f)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\
&\leq \sum_\alpha \|\Delta f\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\
&\leq C \|\Delta f\|_{\mathrm{L}^2}^2
\end{aligned}$$

Le cas $p \neq 2$ est bien plus délicat dans [GT01] page 230. □

Nous allons voir ce que devient cette estimation de Calderon-Zygmund sur le tore $\mathbb{T}^d$ avec des fonctions lisse à moyenne nulle c-à-d $f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$.

Lemme 4.1.5. *Soit $p \in (1, \infty)$. Alors il existe une contante positive $C_{d,p}$ tel que pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$ on a*

$$\|f\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p} \|\Delta f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} \tag{4.3}$$

Démonstration. Le cas $p = 2$ se fais de même par Fourier avec application du théorème de Parceval-Plancherel. Le cas $p \neq 2$ est détaillé dans [MG18] □

Lemme 4.1.6 (Estimation de l'anti-dérivée)**.** *Soit* $p \in (1,\infty)$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *Alors il existe une constante positive* $C_{d,p,k}$ *tel que :*

$$\|D^{-k}f\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p,k}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d) \tag{4.4}$$

Démonstration. Si k est pair alors d'après une application itérative de (4.3) on a

$$\|D^{-k}f\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\mathbb{T}^d)} = \|\Delta^{-k/2}f\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p}\|\Delta^{-k/2+1}f\|_{\mathrm{W}^{k-2,p}(\mathbb{T}^d)} \leq \cdots \leq C_{d,p}^{k/2}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)}$$

Dans ce cas on prend $C_{d,p,k} = C_{d,p}^{k/2}$.

Si k est impair alors d'après la même application itérative de (4.3) on a

$$\|D^{-k}f\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p}^{k-2/2}\|D^{-1}f\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{T}^d)} = C_{d,p}^{k-2/2}\|\nabla\Delta^{-1}f\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{T}^d)}.$$

Or

$$\|\nabla\Delta^{-1}f\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{T}^d)} \leq \|\Delta^{-1}f\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p,}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)}$$

toujours avec (4.3). Donc

$$\|D^{-k}f\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p}^{k-2/2}C_{d,p,}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} = C_{d,p}^{k/2}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)}$$

Alors on prend $C_{d,p,k} = C_{d,p}^{k/2}$.

Ainsi dans tout les cas $C_{d,p,k} = C_{d,p}^{k/2}$. □

Pour finir cette section sur les estimations, nous allons voir l'estimation des points finaux de l'anti-dérivation c-à-d le cas $p = 1$ et $p = \infty$ par le lemme suivant

Lemme 4.1.7. *Soit* $p \in [1,\infty]$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *Alors il existe une constante positive* $C_{d,p,k}$ *tel que*

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d), \quad \|D^{-k}f\|_{\mathrm{W}^{k-1,p}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p,k}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)} \tag{4.5}$$

Démonstration. Le cas $p \in (1,\infty)$ est trivial grâce à (4.4).

Le cas $p = \infty$ utilise l'injection de Sobolev de $\mathrm{W}^{1,q}$ avec $q = d+1$ dans L^∞. Soit g une fonction lisse et α un multi-indice, tel que $|\alpha| \leq k-1$. Alors

$$\begin{aligned}
\|g\|_{\mathrm{W}^{k-1,\infty}(\mathbb{T}^d)} &= \sum_{|\alpha|\leq k-1}\|\partial^\alpha g\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^d)} \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq k-1} C_d\|D(\partial^\alpha g)\|_{\mathrm{L}^{d+1}(\mathbb{T}^d)} \\
&= C_d\sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha g\|_{\mathrm{L}^{d+1}(\mathbb{T}^d)} \\
&= C_d\|g\|_{\mathrm{W}^{k,d+1}(\mathbb{T}^d)} \\
\|g\|_{\mathrm{W}^{k-1,\infty}(\mathbb{T}^d)} &\leq C_d\|g\|_{\mathrm{W}^{k,d+1}(\mathbb{T}^d)}.
\end{aligned}$$

En prenant $g = D^{-k}f$ et en utilisant (4.4), on a bien

$$\|D^{-k}f\|_{\mathrm{W}^{k-1,\infty}(\mathbb{T}^d)} \leq C_d\|D^{-k}f\|_{\mathrm{W}^{k,d+1}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p,k}\|f\|_{\mathrm{L}^{d+1}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p,k}\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^d)}$$

Alors, $\|D^{-k}f\|_{\mathrm{W}^{k-1,\infty}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,p,k}\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^d)}$

Pour $p = 1$, nous utilisons la caractérisation du dual de L^1.

$\forall f \in \mathrm{L}^1$,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} &= \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}=1} \{\int_{\mathbb{T}^d} f\varphi \quad / \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty} = 1\} \\
\|\partial^\alpha D^{-k} f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} &= \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}=1} \int_{\mathbb{T}^d} \partial^\alpha D^{-k} f\varphi \\
&= \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}=1} \int_{\mathbb{T}^d} f(\partial^\alpha D^{-k}\varphi) \\
&\leq \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}=1} \int_{\mathbb{T}^d} |f(\partial^\alpha D^{-k}\varphi)| \\
&\leq \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}=1} (\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} \|\partial^\alpha D^{-k}\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^d)}), \\
&\leq \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}=1} (\|\partial^\alpha D^{-k}\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^d)}) \\
&= C_{d,\infty,k} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} \|\partial^\alpha D^{-k} f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} \\
&= C_{d,\infty,k} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} \|\partial^\alpha D^{-k} f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|D^{-k} f\|_{\mathrm{W}^{k-1,1}(\mathbb{T}^d)} &= \sum_{|\alpha| \leq k-1} \|\partial^\alpha D^{-k} f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} \leq \sum_{|\alpha| \leq k-1} C_{d,\infty,k} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} \\
&= C_{d,1,k} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)}, \ \textit{d'après le cas } p = \infty
\end{aligned}
$$

Donc $\|D^{-k} f\|_{\mathrm{W}^{k-1,1}(\mathbb{T}^d)} \leq C_{d,1,k} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)}$

Alors (4.5) est satisfaite.

□

4.1.3 Anti-divergence pour les oscillations rapides

L'antidérivation du premier ordre $D^{-1} = \nabla\Delta^{-1}$ est un opérateur anti-divergence, que nous appellerons opérateur anti-divergence standard. Il sera utilisé dans les situations où l'estimation fournie dans le lemme (4.4) avec $k = 1$ suffit. Cependant, à de nombreuses étapes de la preuve de la proposition (3.2.1), des estimations affinées sur l'anti-divergence est nécessaire. Nous introduisons donc un opérateur bilinéaire apte à contrôler l'anti-divergence d'un produit de fonctions si l'une d'elle oscille rapidement.

Définition 10 (Opérateur anti-divergence bilinéaire)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$. Introduisons l'opérateur $\mathscr{R}_N$. Il envoie $C^\infty(\mathbb{T}^d) \times \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{T}^d)$ dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)$ et est défini par

$$
\mathscr{R}_N(f, g) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k D^k f D^{-k-1} g + D^{-1}\Big((-1)^N D^N f \cdot D^{-N} g - \fint_{\mathbb{T}^d} fg\Big) \tag{4.6}
$$

Lemme 4.1.8 (Propriétés de $\mathscr{R}_N$)**.** *Soit $N \in \mathbb{N}$, $f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$.*

1. $\operatorname{div}(\mathscr{R}_N(f, g)) = fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg$;

2. $\partial_j(\mathscr{R}_N(f, g)) = R_N(\partial_j f, g) + \mathscr{R}_N(f, \partial_j g)$.

3. *Si p, r et s sont dans*$[1,\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$ *alors*

$$\|\mathscr{R}_N(f,g)\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^r}\|D^{-k-1}g\|_{L^s} + C_{d,p}\|D^N f\|_{L^r}\|D^{-N}g\|_{L^s}$$

Démonstration. le 1) est montré par récurrence sur N. Par définition, $\mathscr{R}_0(f,g) = D^{-1}(fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg)$ pour $N=0$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathscr{R}_0(f,g)) =& \operatorname{div}(D^{-1}(fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg))\\
=& \operatorname{div}(\nabla\Delta^{-1}(fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg))\\
=& \Delta\Delta^{-1}(fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg)\\
=& fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg
\end{aligned}$$

Supposons que pour tout $N \geq 1$, $\operatorname{div}(\mathscr{R}_{N-1}(f,g)) = fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg$ et que N est pair.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathscr{R}_N(f,g)) - fg + \fint_{\mathbb{T}^d} fg =& -(fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg) + \operatorname{div}(\mathscr{R}_{N-1}(f,g))\\
& -(-1)^{N-1}D^{N-1}f.D^{-N+1}g + (-1)^N D^N f.D^{-N}g\\
& + \operatorname{div}((-1)^{N-1}D^{N-1}f.D^{-N}g)\\
=& D^{N-1}f.D^{-N+1}g + D^N f.D^{-N}g - \operatorname{div}(D^{N-1}f)D^{-N}g\\
& - D^{N-1}f.\nabla D^{-N}g\\
=& 0
\end{aligned}$$

car $\operatorname{div}(D^{N-1}f) = D^N f, \nabla D^{-N}g = D^{-N+1}g$ et N pair.

Pour (ii)

$$\begin{aligned}
\partial_j(\mathscr{R}_N(f,g)) =& \partial_j(\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k D^k f D^{-k-1}g + D^{-1}((-1)^N D^N f.D^{-N}g) - \fint_{\mathbb{T}^d} fg)\\
=& \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k[\partial_j D^k f D^{-k-1}g + D^k f \partial_j D^{-k-1}g]\\
& + \partial_j(D^{-1}((-1)^N D^N f.D^{-N}g) - \fint_{\mathbb{T}^d} fg)\\
=& \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k D^k \partial_j f D^{-k-1}g + \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k D^k f D^{-k-1}\partial_j g\\
& + D^{-1}[(-1)^N(\partial_j D^N f).D^{-N}g + (-1)^N D^N f.(\partial_j D^{-N}g)\\
& - \fint_{\mathbb{T}^d}(\partial_j f)g - \fint_{\mathbb{T}^d} f(\partial_j g)]\\
=& \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k D^k(\partial_j f)D^{-k-1}g + D^{-1}((-1)^N D^N(\partial_j f).D^{-N}g) - \fint_{\mathbb{T}^d}(\partial_j f)g)\\
& + \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k D^k f D^{-k-1}(\partial_j g) + D^{-1}((-1)^N D^N f.D^{-N}(\partial_j g)) - \fint_{\mathbb{T}^d} f(\partial_j g))\\
=& R_N(\partial_j f, g) + R_N(f, \partial_j g)
\end{aligned}$$

Pour (iii), pour $N = 0$ et d'après le lemme 3.4

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_0(f,g) =& D^{-1}(fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg) \\
\|\mathscr{R}_0(f,g)\|_{L^p} =& \|D^{-1}(fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg)\|_{L^p} \\
\leq& \|fg - \fint_{\mathbb{T}^d} fg\|_{L^p} \\
\leq& 2\|fg\|_{L^p} \\
\leq& 2\|f\|_{L^r}\|g\|_{L^s} \\
\|R_0(f,g)\|_{L^p} \leq& 2\|f\|_{L^r}\|g\|_{L^s}
\end{aligned}$$

Pour $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_N(f,g) =& \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k D^k f D^{-k-1} g + D^{-1}((-1)^N D^N f.D^{-N} g) - \fint_{\mathbb{T}^d} fg \\
\|\mathscr{R}_N(f,g)\|_{L^p} =& \|\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k D^k f D^{-k-1} g + D^{-1}((-1)^N D^N f.D^{-N} g) - \fint_{\mathbb{T}^d} fg\|_{L^p} \\
\leq& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f D^{-k-1} g\|_{L^p} + \|D^{-1}((-1)^N D^N f.D^{-N} g) - \fint_{\mathbb{T}^d} fg\|_{L^p} \\
\leq& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^r}\|D^{-k-1} g\|_{L^s} + C_{d,p}\|(-1)^N D^N f.D^{-N} g - \fint_{\mathbb{T}^d} fg\|_{L^p} \\
\leq& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^r}\|D^{-k-1} g\|_{L^s} + C_{d,p}\|D^N f.D^{-N} g\|_{L^p} \\
\leq& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^r}\|D^{-k-1} g\|_{L^s} + C_{d,p}\|D^N f\|_{L^r}\|D^{-N} g\|_{L^s} \\
\|R_N(f,g)\|_{L^p} \leq& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^r}\|D^{-k-1} g\|_{L^s} + C_{d,p}\|D^N f\|_{L^r}\|D^{-N} g\|_{L^s}
\end{aligned}$$

□

De cette estimation, nous remarquons que, lorsque $g = g_\lambda$, $r = \infty$, $s = p$,

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{R}_N(f,g)\|_{L^p} \leq& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^r}\|D^{-k-1} g\|_{L^s} + C_{d,p}\|D^N f\|_{L^r}\|D^{-N} g\|_{L^s} \\
=& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^\infty}\|D^{-k-1} g_\lambda\|_{L^p} + C_{d,p}\|D^N f\|_{L^\infty}\|D^{-N} g_\lambda\|_{L^p} \\
=& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^\infty}\lambda^{-k-1}\|D^{-k-1} g\|_{L^p} + C_{d,p}\|D^N f\|_{L^\infty}\lambda^{-N}\|D^{-N} g\|_{L^p} \\
\leq& \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^\infty}\lambda^{-k-1} C_{d,p,k}\|g\|_{L^p} + C_{d,p}\|D^N f\|_{L^\infty}\lambda^{-N} C_{d,p,N}\|g\|_{L^p} \\
\leq& C_{d,p,N}\|g\|_{L^p}(\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{-k-1}\|D^k f\|_{L^\infty} + \lambda^{-N}\|D^N f\|_{L^\infty}) \\
\|R_N(f,g_\lambda)\|_{L^p} \leq& C_{d,p,N}\|g\|_{L^p}(\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{-k-1}\|D^k f\|_{L^\infty} + \lambda^{-N}\|D^N f\|_{L^\infty})
\end{aligned}$$

$$\|\mathscr{R}_N(f, g_\lambda)\|_{L^p} \leq C_{d,p,N}\|g\|_{L^p}(\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{-k-1}\|D^k f\|_{L^\infty} + \lambda^{-N}\|D^N f\|_{L^\infty})$$

De même pour $g = g_\lambda$, $r = p$, $s = \infty$:

$$\|\mathscr{R}_N(f, g_\lambda)\|_{L^p} \leq C_{d,p,N}\|g\|_{L^\infty}(\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{-k-1}\|D^k f\|_{L^p} + \lambda^{-N}\|D^N f\|_{L^p}$$

4.2 Les perturbations

Dans cette section nous présentons les éléments de bases de notre construction à savoir ; la densité et le champs de vecteur de Mikado qui nous permettent d'obtenir et d'estimer ρ_1 et u_1 à partir de ρ_0 et u_0.

4.2.1 Espace-temps de densités et vecteurs de Mikado

À un point ζ dans $\mathbb{T}^d$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$, on peut associer la ligne paramétrée : $\mathbb{R} \ni s \longmapsto \zeta + sv \in \mathbb{T}^d$. Soit $(e_1, \cdots, e_d)$ une base standard de $\mathbb{R}^d$. Fixons les d points du tore $\zeta_i = \frac{i}{d}e_i$, et les d lignes paramétrées parallèles aux axes, $x_i : \mathbb{R} \ni s \longmapsto \zeta_i + se_i \in \mathbb{T}^d$.

Lemme 4.2.1. *Il existe $r > 0$ tel que $d_{\mathbb{T}^d}\big(x_i(s), x_j(s)\big) > 2r$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $i \neq j$, où $d_{\mathbb{T}^d}$ désigne la distance euclidienne sur le tore.*

Démonstration. Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que pour tout $r > 0$, il existe $i \neq j$ et $s \in \mathbb{R}$ tel que $d_{\mathbb{T}^d}\big(x_i(s), x_j(s)\big) \leq 2r$. Cela entraîne que le point $(\zeta_i - \zeta_j) + s(e_i - e_j)$ dans $\mathbb{R}^d$ est à distance (euclidienne) de $\mathbb{Z}^d$ inférieure $2r$, donc en particulier qu'il existe n_i et n_j entiers (relatifs) tels que $|s + \frac{i}{d} - n_i|$ et $|s + \frac{j}{d} - n_j|$ sont majorés par $2r$, donc $|\frac{i-j}{d} - (n_i - n_j)|$ est majoré par $4r$. Or i et j sont distincts et compris entre 1 et d, donc $|\frac{i-j}{d}|$ est compris entre $\frac{1}{d}$ et $\frac{d-1}{d}$, donc à distance de $\mathbb{Z}$ supérieure ou égale à $\frac{1}{d}$, alors que $n_i - n_j$ est entier (relatif). On a donc une contradiction si $4r < \frac{1}{d}$. □

Soit φ une fonction lisse sur $\mathbb{R}^d$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq B(P, r) \subseteq (0,1)^d$, avec $P = (\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}) \in (0,1)^d$, et $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2 = 1$. On se donne un entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et son conjugué de Holder p' qui défissent les constantes suivantes :

$$a := \frac{d}{p}, \quad b := \frac{d}{p'} \quad (\text{donc } a + b = d \text{ puisque } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1),$$

et les fonctions scalaires : $\varphi_\mu(x) := \mu^a \varphi(\mu x)$, $\tilde{\varphi}_\mu(x) := \mu^b \varphi(\mu x)$, avec $\mu \geq 1$.

Lemme 4.2.2. *Pour tout $\mu \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [1, \infty]$,*

$$\|D^k \varphi_\mu\|_{L^r} = \mu^{a - \frac{d}{r} + k}\|D^k \varphi\|_{L^r}, \quad \|D^k \tilde{\varphi}_\mu\|_{L^r} = \mu^{b - \frac{d}{r} + k}\|D^k \varphi\|_{L^r} \tag{4.7}$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\mu \tilde{\varphi}_\mu = 1. \tag{4.8}$$

Démonstration. On a :

$$
\begin{aligned}
\|D^k\varphi_\mu\|_{\mathrm{L}^r}^r =& \int_{\mathbb{R}^d}(D^k\varphi_\mu(x))^r\,\mathrm{d}x\\
=&\mu^{ar}\int_{\mathbb{R}^d}(D^k\varphi_\mu(x))^r\,\mathrm{d}x \quad \text{(par définition de } \varphi_\mu)\\
=&\mu^{ar}\int_{\mathbb{R}^d}\mu^{kr}(D^k(\varphi)(\mu x))^r\,\mathrm{d}x\\
=&\mu^{ar+kr-d}\int_{\mathbb{R}^d}(D^k(\varphi)(t))^r\,\mathrm{d}t\\
=&\mu^{ar+kr-d}\int_{\mathbb{R}^d}(D^k(\varphi)(x))^r\,\mathrm{d}x\\
=&\mu^{ar+kr-d}\|D^k\varphi\|_{\mathrm{L}^r}^r\\
\|D^k\varphi_\mu\|_{\mathrm{L}^r}^r =&\mu^{ar+kr-d}\|D^k\varphi\|_{\mathrm{L}^r}^r
\end{aligned}
$$

De façon analogue, $\|D^k\tilde{\varphi}_\mu\|_{\mathrm{L}^r} = \mu^{b-\frac{d}{r}+k}\|D^k\varphi\|_{\mathrm{L}^r}$. De plus,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\mu\tilde{\varphi}_\mu =& \int_{\mathbb{R}^d}\mu^{a+b}\varphi^2(\mu x)dx\\
=&\mu^{a+b}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^2(\mu x)dx\\
=&\mu^{d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^2(\mu x)dx\\
=&\mu^{d}\mu^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^2(x)dx\\
=&\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^2(x)dx\\
=&1\\
\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\mu\tilde{\varphi}_\mu =&1
\end{aligned}
$$

□

Pour tout $y \in \mathbb{T}^d$, nous définissons la translation $\tau_y : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d, \tau_y(x) := x - y$. Notons que $\|D^k(g\circ\tau_y)\|_{\mathrm{L}^r} = \|D^k g\|_{\mathrm{L}^r}$ pour toute fonction périodique g, k dans $\mathbb{N}$, et r dans $[1,\infty]$.

Lemme 4.2.3. *Il existent des fonctions périodiques $\varphi_\mu^j : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ et $\tilde{\varphi}_\mu^j : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, pour $j = 1,\cdots,d$, tels que*

$$
\|D^k\varphi_\mu^j\|_{\mathrm{L}^r} = \mu^{a-\frac{d}{r}+k}\|D^k\varphi\|_{\mathrm{L}^r}, \quad \|D^k\tilde{\varphi}_\mu^j\|_{\mathrm{L}^r} = \mu^{b-\frac{d}{r}+k}\|D^k\varphi\|_{\mathrm{L}^r}. \tag{4.9}
$$

De plus, $\fint_{\mathbb{T}^d}(\varphi_\mu^i\circ\tau_{se_i})(\tilde{\varphi}_\mu^i\circ\tau_{se_i}) = 1$, pour i de 1 à d. Et $(\varphi_\mu^i\circ\tau_{se_i})(\tilde{\varphi}_\mu^j\circ\tau_{se_j}) = 0$ pour $i \neq j$ et $s \in \mathbb{R}$.

Notons que cette dernière équation signifie $(\varphi_\mu^i(x-se_i)(\tilde{\varphi}_\mu^j(x-se_j) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{T}^d$.

Démonstration. Considérons les fonctions périodiques suivantes : $\varphi_\mu^j := \varphi_\mu\circ\tau_\zeta$ et $\tilde{\varphi}_\mu^j := \tilde{\varphi}_\mu\circ\tau_\zeta$, où

$\zeta_j = \frac{j}{d} e_j$.

$$\begin{aligned}
\|D^k \varphi_\mu^j\|_{\mathrm{L}^r} =& \|D^k(\varphi_\mu \circ \tau_\zeta)\|_{\mathrm{L}^r} \\
=& \|D^k(\varphi_\mu)\|_{\mathrm{L}^r} \\
=& \mu^{a-\frac{d}{r}+k}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^r} \\
\|D^k \varphi_\mu^j\|_{\mathrm{L}^r} =& \mu^{a-\frac{d}{r}+k}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^r}
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\|D^k \tilde{\varphi}_\mu^j\|_{\mathrm{L}^r} =& \|D^k(\tilde{\varphi}_\mu \circ \tau_\zeta)\|_{\mathrm{L}^r} \\
=& \|D^k(\tilde{\varphi}_\mu)\|_{\mathrm{L}^r} \\
=& \mu^{b-\frac{d}{r}+k}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^r} \\
\|D^k \varphi_\mu^j\|_{\mathrm{L}^r} =& \mu^{b-\frac{d}{r}+k}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^r}
\end{aligned}$$

$\forall i = 1, \cdots, d$,

$$\begin{aligned}
\fint_{\mathbb{T}^d} (\varphi_\mu^i \circ \tau_{se_i})(\tilde{\varphi}_\mu^i \circ \tau_{se_i})(x)\,dx =& \fint_{\mathbb{T}^d} \varphi_\mu^i(x - \zeta_i - se_i)\tilde{\varphi}_\mu^i(x - \zeta_i - se_i) \\
=& \fint_{\mathbb{T}^d} \big(\varphi_\mu^i \tilde{\varphi}_\mu^i\big)(x - \zeta_i - se_i)\,dx \\
=& 1
\end{aligned}$$

(par changement de variable affine et du fait que $\fint_{\mathbb{T}^d} \varphi_\mu \tilde{\varphi}_\mu = 1$).

Soit maintenant $x \in \mathbb{T}^d$ et $i \neq j$.

$$\begin{aligned}
(\varphi_\mu^i \circ \tau_{se_i})(\tilde{\varphi}_\mu^i \circ \tau_{se_i})(x) =& \varphi_\mu^i(x - se_i).\tilde{\varphi}_\mu^j(x - se_j) \\
=& \varphi_\mu(x - \zeta_i - se_i)\tilde{\varphi}_\mu(x - \zeta_j - se_j) \\
=& \varphi_\mu(x - (\zeta_i + se_i))\tilde{\varphi}_\mu(x - (\zeta_j + se_j)) \\
=& \varphi_\mu(x - x_i(s))\tilde{\varphi}_\mu(x - x_j(s))
\end{aligned}$$

D'après le lemme 4.1, $d_{\mathbb{T}^d}(x - x_i(s); x - x_j(s)) = d_{\mathbb{T}^d}(x_i(s); x_j(s)) > 2r$. Or $supp\varphi_\mu = supp\tilde{\varphi}_\mu$ et contenu dans la boule $B(P, r)$.

Ainsi $\varphi_\mu(x - x_i(s))\tilde{\varphi}_\mu(x - x_j(s)) = 0 \ \forall i \neq j, \forall s \in \mathbb{T}^d$ □

Nous fixons la fonction périodique $\psi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ tel que $\fint_{\mathbb{T}^d} \psi = 0$ et $\fint_{\mathbb{T}^d} \psi^2 = 1$ et nous définissons l'application $\psi^j : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $\psi^j(x) := \psi(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_d)$ tel que

$$\fint_{\mathbb{T}^d} \psi^j = 0, \quad \fint_{\mathbb{T}^d} (\psi^j)^2 = 1.$$

ψ^j est défini sur $\mathbb{T}^d$, mais indépendant de x_j.

Introduisons les paramètres suivants :

— λ pour les oscillations rapides,$\lambda \in \mathbb{N}$;

— μ qui mesure la concentration $\mu \gg \lambda$;

— ν pour les oscillations plus rapides $\nu \in \lambda\mathbb{N}$;

— ω qui mesure la vitesse des phases.

Maintenant nous allons définir la fonction densité de Mikado et le champs de vecteur de Mikado que nous utiliserons pour la preuve de la proposition.

— Densité de Mikado : $\Theta^j(t,x) := \varphi^j_\mu(\lambda(x-\omega t e_j))\psi^j(\nu x)$;

— Champ de vecteur de Mikado : $W^j(t,x) := \tilde{\varphi}^j_\mu(\lambda(x-\omega t e_j))\psi^j(\nu x)e_j$.

À ces deux applications nous ajoutons le correcteur quadratique.

— Correcteur quadratique : $Q^j(t,x) = \frac{1}{\omega}\varphi^j_\mu\tilde{\varphi}^j_\mu(\lambda(x-\omega t e_j))(\psi^j(\nu x))^2$.

Nous faisons les notations suivantes pour des raisons de simplicité :

— $g_\lambda(x) := g(\lambda x)$ pour tout $g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$,

— $g_\nu(x) := g(\nu x)$,

— $\Theta^j = \Theta^j(t) = ((\varphi^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\psi^j_\nu$,

— $W^j = W^j(t) = ((\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\psi^j_\nu e_j$,

— $Q^j = Q^j(t) = \frac{1}{\omega}((\varphi^j_\mu\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})(\psi^j_\nu e_j)^2$.

Remarque 4.2.4. *Les fonctions densité et champ de vecteurs de Mikado définies ci-dessus ne sont pas des solutions stationnaires de l'équation de transport incompressible. Sinon une telle idée impliquerait* $\mathrm{div}(W^j) = 0$ *et* $\partial_t\Theta^j + \mathrm{div}(\Theta^j W^j) = 0$. *Dans ce cas* $\varphi(\lambda(x-\omega t e_j)) = cste$ *sur* $\mathbb{T}^d$, *et* $\partial_t\Theta^j = 0$. *Ce qui est contradictoire à cause de la dépendance temporelle de* Θ^j *et du fait que* φ *est à support compact dans la boule de rayon* r.

Alors nous avons les deux relations suivantes :

$$\partial_t\Theta^j = -\lambda\omega((\partial_j\varphi^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\psi^j_\nu,$$
$$\mathrm{div}(W^j) = \lambda((\partial_j\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\psi^j_\nu e_j$$

Évidement, $\omega Q^j = \Theta^j W^j$ *et cela permet encore d'avoir un ensemble de fonctions similaires à une solution à l'équation de transport incompressible comme indiqué dans la proposition suivante.*

Soit

$$\epsilon := \frac{d}{p} + \frac{d}{\tilde{p}} - d - 1. \tag{4.10}$$

Notons que $\epsilon > 0$ car $\epsilon = \frac{d}{p} + \frac{d}{\tilde{p}} - d - 1 = \frac{d}{\tilde{p}} - \frac{d}{p'} - 1 > 0$ grâce à (3.1).

Définissons une constante globale M qui ne dépend pas de p et de p' par

$$M := 2d \max_{k=0,1}\{\|D^k\varphi\|_{L^\infty}\|D^k\psi\|_{L^\infty}, \|\varphi\|^2_{L^\infty}\|\psi\|^2_{L^\infty}\} \tag{4.11}$$

Proposition 4.2.5. *Les fonctions de Mikado satisfont les estimations suivantes :*

$$\|\Theta^j(t)\|_{L^p} \le \frac{M}{2d}, \qquad \|W^j(t)\|_{L^{p'}} \le \frac{M}{2d}, \qquad \|Q^j(t)\|_{L^p} \le \frac{M\mu^b}{\omega}. \tag{4.12}$$
$$\|\Theta^j(t)\|_{L^1} \le \frac{M}{\mu^b}, \qquad \|W^j(t)\|_{L^1} \le \frac{M}{\mu^a}, \qquad \|Q^j(t)\|_{L^1} \le \frac{M}{\omega}. \tag{4.13}$$

$$\|W^j(t)\|_{C^0} \le M\mu^b, \qquad \|W^j(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} \le M(\frac{\lambda\mu+\nu}{\mu^{1+\epsilon}}) \tag{4.14}$$

En outre $\Theta^i W^j = 0$ *si* $i \neq j$, *et les fonctions de Mikado sont solutions de l'équations de continuité de cette façon :*

$$\partial_t Q^j + \mathrm{div}(\Theta^j W^j) = 0. \tag{4.15}$$

sur $[0,T]\times\mathbb{T}^d$.

Démonstration. Les estimations (4.12),(4.13),(4.14) sont des conséquences immédiates de (4.9)

$$\begin{aligned}
\|\Theta^j(t)\|_{L^p} &\leq \|((\varphi^j_\mu)_\lambda\circ\tau_{\omega t e_j})\|_{L^p}\|\psi^j_\nu\|_{L^\infty}\\
&=\|\varphi^j_\mu\|_{L^p}\|\psi^j\|_{L^\infty}\\
&=\|\varphi\|_{L^p}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&\leq\|\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&\leq\frac{M}{2d},\\
\|\Theta^j(t)\|_{L^p} &\leq\frac{M}{2d},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|W^j(t)\|_{L^{p'}} &\leq \|((\tilde\varphi^j_\mu)_\lambda\circ\tau_{\omega t e_j})\|_{L^{p'}}\|\psi^j_\nu\|_{L^\infty}\\
&=\|\tilde\varphi^j_\mu\|_{L^{p'}}\|\psi^j\|_{L^\infty}\\
&=\|\tilde\varphi\|_{L^{p'}}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&\leq\|\tilde\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&\leq\frac{M}{2d},\\
\|W^j(t)\|_{L^{p'}} &\leq\frac{M}{2d},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|Q^j(t)\|_{L^p} &\leq\frac{1}{\omega}\|\varphi^j_\mu\tilde\varphi^j_\mu\|_{L^p}\|\psi\|^2_{L^\infty}\\
&\leq\frac{1}{\omega}\|\tilde\varphi^j_\mu\|_{L^p}\|\varphi^j_\mu\|_{L^\infty}\|\psi\|^2_{L^\infty}\\
&\leq\frac{1}{\omega}\|\tilde\varphi^j_\mu\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|^2_{L^\infty}\\
&\leq\frac{1}{\omega}\mu^{\frac{d}{p'}-\frac{d}{p}}\|\varphi\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|^2_{L^\infty}\\
&\leq\frac{M\mu^b}{\omega},\\
\|Q^j(t)\|_{L^p} &\leq\frac{M\mu^b}{\omega},\\
\|\Theta^j(t)\|_{L^1} &\leq \|((\varphi^j_\mu)_\lambda\circ\tau_{\omega t e_j})\|_{L^1}\|\psi^j_\nu\|_{L^\infty}\\
&=\|\varphi^j_\mu\|_{L^1}\|\psi^j\|_{L^\infty}\\
&=\mu^{a-d}\|\varphi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&=\mu^{-b}\|\varphi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&\leq\mu^{-b}\|\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&\leq\frac{M}{\mu^b},\\
\|\Theta^j(t)\|_{L^1} &\leq\frac{M}{\mu^b},
\end{aligned}$$

(d'après le lemme (4.2.2) pour $k = 0$ et $r = 1$)

$$\begin{aligned}
\|W^j(t)\|_{L^1} \leq &\|((\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\|_{L^1}\|\psi^j_\nu\|_{L^\infty}\\
=&\|\tilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^1}\|\psi^j\|_{L^\infty}\\
=&\mu^{b-d}\|\tilde{\varphi}\|_{L^1}\|\psi\|_{L^\infty}\\
=&\mu^{-a}\|\tilde{\varphi}\|_{L^1}\|\psi\|_{L^\infty}\\
\leq&\mu^{-a}\|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}\\
\leq&\frac{M}{\mu^b},\\
\|W^j(t)\|_{L^1} \leq&\frac{M}{\mu^b},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|Q^j(t)\|_{L^1} \leq&\frac{1}{\omega}\|\varphi^j_\mu\tilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^1}\|\psi\|^2_{L^\infty}\\
\leq&\frac{1}{\omega}\|\tilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^1}\|\varphi^j_\mu\|_{L^\infty}\|\psi\|^2_{L^\infty}\\
\leq&\frac{1}{\omega}\|\tilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^1}\|\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|^2_{L^\infty}\\
\leq&\frac{\mu^{-a}}{\omega}\|\varphi\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|^2_{L^\infty}\\
\leq&\frac{M\mu^{-a}}{\omega},\\
\|Q^j(t)\|_{L^1} \leq&\frac{M}{\omega},\\
\|W^j(t)\|_{C^0} =&\|W^j(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\\
\leq&\|((\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\|_{L^\infty}\|\psi^j_\nu\|_{L^\infty}\\
=&\|\tilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^\infty}\|\psi^j\|_{L^\infty}\\
=&\mu^b\|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}\\
=&\mu^{-a}\|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}\\
\leq&M\mu^b,\\
\|W^j(t)\|_{C^0} \leq&M\mu^b.
\end{aligned}$$

Puisque $W^j(t) = ((\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\psi^j_\nu e_j$,

$$\begin{aligned}
\|W^j(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} &\leq \|W^j(t)\|_{L^{\tilde{p}}} + \|DW^j(t)\|_{L^{\tilde{p}}}\\
&\leq \|(\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j}\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi^j_\nu\|_{L^\infty}\\
&\quad + \|D((\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi^j_\nu\|_{L^\infty} + \|(\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j}\|_{L^{\tilde{p}}}\|D(\psi^j_\nu)\|_{L^\infty}\\
&\leq \|\tilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi^j\|_{L^\infty} + \lambda\|D\tilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi^j_\nu\|_{L^\infty} + \nu\|\tilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^{\tilde{p}}}\|D\psi^j_\nu\|_{L^\infty}\\
&\leq \mu^{\frac{d}{p'}-\frac{d}{\tilde{p}}}\|\varphi\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi\|_{L^\infty} + \lambda\mu^{\frac{d}{p'}-\frac{d}{\tilde{p}}+1}\|D\varphi\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi\|_{L^\infty} + \nu\mu^{\frac{d}{p'}-\frac{d}{\tilde{p}}}\|\varphi\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&= \mu^{-(1+\epsilon)}\|\varphi\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi\|_{L^\infty} + \lambda\mu^{-\epsilon}\|D\varphi\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi\|_{L^\infty} + \nu\mu^{-(1+\epsilon)}\|\varphi\|_{L^{\tilde{p}}}\|\psi\|_{L^\infty}\\
&\leq \mu^{-(1+\epsilon)}M + \lambda\mu^{-\epsilon}M + \nu\mu^{-(1+\epsilon)}M,\\
\|W^j(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} &\leq M\left(\frac{\lambda\mu+\nu}{\mu^{1+\epsilon}}\right),
\end{aligned}$$

d'après (30) et $\forall i \neq j$ et $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\begin{aligned}\Theta^i(t)W^j(t) =&((\varphi^i_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_i})\psi^i_\nu.((\tilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\psi^j_\nu e_j\\ =&(\varphi^i_\mu(\lambda x) \circ \tau_{\omega t e_i}).(\tilde{\varphi}^j_\mu(\lambda x) \circ \tau_{\omega t e_j})\psi^j_\nu \psi^j_\nu e_j\\ =&(\varphi^i_\mu(x) \circ \tau_{s e_i}).(\tilde{\varphi}^j_\mu(x) \circ \tau_{s e_j})\psi^i_\nu \psi^j_\nu e_j\\ =&0.\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\Theta^j(t)W^j(t) &= \omega Q^j(t)e_j\\ &= F(x-\omega t e_j)\psi^j_\nu e_j.\end{aligned}$$

où $F : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ est une certaine fonction différentiable. ψ^j_ν ne dépend pas de t, alors d'une part $\partial_t Q^j(t) = -(\nabla F)\cdot(\psi^j_\nu)e_j$. D'autre part

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\Theta^j W^j) =&\operatorname{div}(\omega Q^j)\\ =&\operatorname{div}(F(x-\omega t e_j)\psi^j_\nu e_j)\\ =&\nabla F(x-\omega t e_j)\psi^j_\nu e_j + F(x-\omega t e_j)\operatorname{div}(\psi^j_\nu)_j\\ =&\nabla F \psi^j_\nu e_j,\\ \operatorname{div}(\Theta^j W^j) =&\nabla F \psi^j_\nu e_j.\end{aligned}$$

Nous avons $\quad \partial_t Q^j + \operatorname{div}(\Theta^j W^j) = 0.$ □

4.2.2 Définition des perturbations

Soit (ρ_0, u_0, R_0) dans la proposition (3.2.1). Notons par $R^j_0(t,x)$, les composantes du vecteur $R_0(t,x)$ ie
$R_0(t,x) = \sum_{j=1}^d R^j_0(t,x)e_j$

Nous définissons maintenant une nouvelle densité ρ et un nouveau champ de vecteur u par :
$\rho_1(t,x) := \rho_0(t,x) + \vartheta(t,x) + \vartheta_c(t) + q(t,x) + q_c(t)$
$u_1(t,x) := u_0(t,x) + w(t,x) + w_c(t,x)$ où v, q, w sont respectivement la densité de Mikado, le correcteur quadratique, et le champ de vecteur de Mikado. q_c et ϑ_c sont les termes correcteurs du champs R_0.Soit η et δ des constantes strictement positives.
ϑ, q, w sont définis par :
$\vartheta(t,x) := \eta \sum_{j=1}^d \chi_j(t,x)\operatorname{sgn}(R^j_0(t,x))|R^j_0(t,x)|^{\frac{1}{p}}\theta^j(t,x)$,
$w(t,x) := \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^d \chi_j(t,x)|R^j_0(t,x)|^{\frac{1}{p'}}W^j(t,x)$,
$q(t,x) := \sum_{j=1}^d \chi_j^2 R^j_0(t,x)Q^j(t,x)$. où $\lambda, \mu, \nu, \omega$ des constantes bien précises et choisies a la fin pour la conclusion de la proposition (3.2.1) et

$$\chi_j : [0,T]\times\mathbb{T}^d \longrightarrow [0,1], \quad \chi_j(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |R^j_0(t,x)| \le \frac{\delta}{4d} \\ 1 & \text{si } |R^j_0(t,x)| \ge \frac{\delta}{2d}\end{cases}$$

sont des fonctions qui assurent la régularité des perturbations. Les $\lambda, \mu, \nu, \omega \gg 1$ seront fixés dans la section 6. Nous allons utiliser pour la suite les notations suivantes :

$\vartheta(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j(t)\theta^j(t), \quad w(t) = \sum_{j=1}^{d} b_j(t)W^j(t), \quad q(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j(t)b_j(t)Q^j(t),$
avec
$a_j(t) := \eta\chi_j(t)\,\mathrm{sgn}(R_0^j(t))|R_0^j(t)|^{\frac{1}{p}}$ et $b_j(t) := \frac{1}{\eta}\chi_j(t)|R_0^j(t)|^{\frac{1}{p'}}$,

Notons que :

$$\begin{aligned} a_j(t)b_j(t) =& \chi_j^2\,\mathrm{sgn}(R_0^j(t))|R_0^j(t)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} \\ =& \chi_j^2\,\mathrm{sgn}(R_0^j(t))|R_0^j(t)| \\ =& \chi_j^2(R_0^j(t)) \\ a_j(t)b_j(t) =& \chi_j^2(R_0^j(t)). \end{aligned}$$

et les estimations suivantes :

$$\|a_j(t)\|_{\mathrm{L}^p} \leq \eta\|R_0(t)\|_{\mathrm{L}^1}^{\frac{1}{p}}, \quad \|b_j(t)\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq \eta^{-1}\|R_0(t)\|_{\mathrm{L}^1}^{\frac{1}{p'}} \tag{4.16}$$

$$\|a_j\|_{C^k}, \|b_j(t)\|_{C^k} \leq C(\eta, \delta, \|R_0(t)\|_{C^k}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.17}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|a_j(t)\|_{\mathrm{L}^p}^p =& \int_{\mathbb{T}^d} \eta^p(\chi_j(t)\,\mathrm{sgn}(R_0^j(t))^p)|R_0^j(t)| \\ \leq& \eta^p \int_{\mathbb{T}^d} |R_0^j(t)| \\ =& \eta^p\|R_0(t)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^d)} \\ \|a_j(t)\|_{\mathrm{L}^p} \leq& \eta\|R_0(t)\|_{\mathrm{L}^1}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

De même
$\|b_j(t)\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq \eta^{-1}\|R_0(t)\|_{\mathrm{L}^1}^{\frac{1}{p'}}$

-Les termes correcteurs v_c et q_c de ρ_1 sont définis par :

$$\begin{aligned} \vartheta_c :=& -\fint_{\mathbb{T}^d} v(t,x)\,dx \\ q_c :=& -\fint_{\mathbb{T}^d} q(t,x)\,dx \end{aligned}$$

-Le terme correcteur w_c de u_1 est défini de tel sorte que la à divergence de u_1 nulle ie $\mathrm{div}(w) + \mathrm{div}(w_c) = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(w(t)) =& \sum_j \mathrm{div}(b_j(t)W^j(t)) \\ =& \sum_j \mathrm{div}(b_j(t)((\tilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\psi_\nu^j e_j) \\ =& \sum_j \nabla(b_j(t)((\tilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})e_j\psi_\nu^j) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$w_c(t) := -\sum_j R_N(f_j(t), \psi_\nu^j) \tag{4.18}$$

où

$$f_j(t) := \nabla(b_j(t)((\tilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})$$

Évidemment $\operatorname{div}(w) + \operatorname{div}(w_c) = 0$ d'après (i) du lemme 3.8 .

4.2.3 Estimations des perturbations

Dans cette section, nous énoncerons et prouverons toutes les estimations nécessaires sur les perturbations en commençant par les termes de densité ϑ et q

Remarque 4.2.6. *Dans cette section et dans les deux sections suivantes, nous désignerons par C toute constante quelconque qui peut dépendre de la constante M définie dans par la relation (35) et de tous les paramètres de l'énoncé de la proposition* (3.2.1) *c-à-d de* $p, \tilde{p}, \delta, \eta, \rho_0, u_0, R_0$.

Lemme 4.2.7.

$$\|\vartheta(t)\|_{L^p} \leq \frac{M\eta}{2} \|R_0(t)\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} + \frac{C}{\lambda^{1/p}} \tag{4.19}$$

Démonstration. D'après le lemme 3.1 de la section 3, il existe une constante C_p tel que $\|fg_\lambda\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}\|g\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} + \frac{C_p}{\lambda^{1/p}}\|f\|_{C^1(\mathbb{T}^d)}\|g\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}$ Rappelons que $\theta^j(t)$ est $\frac{1}{\lambda}$-périodique. Donc en particulier pour $f = a_j(t)$ et $g_\lambda = \theta^j(t)$, cette estimation donne :

$$\begin{aligned}
\|a_j(t)\theta^j(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \leq & \|a_j(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}\|\theta^j(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} + \frac{C_p}{\lambda^{1/p}}\|a_j(t)\|_{C^1(\mathbb{T}^d)}\|\theta^j(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \\
\leq & \eta\frac{M}{2d}\|R_0(t)\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} + \frac{MC_p}{2\lambda^{1/p}d}\|a_j(t)\|_{C^1(\mathbb{T}^d)} \\
\leq & \eta\frac{M}{2d}\|R_0(t)\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} + \frac{C}{\lambda^{1/p}d} \\
\vartheta(t) = \sum_j a_j(t)\theta^j(t) &
\end{aligned}$$

(les relations (4.12),(4.16) ,(4.17) pour $k = 1$ sont utilisées)

$$\begin{aligned}
\|\vartheta(t)\|_{L^p} \leq & \sum_j \|a_j(t)\theta^j(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \\
\leq & \sum_{j=1}^d \left(\eta\frac{M}{2d}\|R_0(t)\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} + \frac{C}{\lambda^{1/p}d}\right) \\
\leq & \eta\frac{M}{2}\|R_0(t)\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} + \frac{C}{\lambda^{1/p}} \\
\|\vartheta(t)\|_{L^p} \leq & \frac{M\eta}{2}\|R_0(t)\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} + \frac{C}{\lambda^{1/p}}
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.2.8. *(q est petit dans* L^p*)*

$$\|q(t)\|_{\mathrm{L}^p} \leq \frac{C\mu^b}{\omega} \tag{4.20}$$

Démonstration.

$$q(t) := \sum_{j=1}^{d} a_j(t) b_j(t) Q^j(t),$$

$$\begin{aligned}
\|q(t)\|_{\mathrm{L}^p} &\leq \sum_{j=1}^{d} \|a_j(t) b_j(t) Q^j(t)\|_{\mathrm{L}^p} \\
&\leq \sum_{j=1}^{d} \|a_j(t) b_j(t)\|_{\mathrm{L}^\infty} \|Q^j(t)\|_{\mathrm{L}^p} \\
&= \sum_{j=1}^{d} \|a_j(t) b_j(t)\|_{C^0} \|Q^j(t)\|_{\mathrm{L}^p} \\
&\leq \sum_{j=1}^{d} \|a_j(t)\|_{C^0} \|b_j(t)\|_{C^0} \frac{M\mu^b}{\omega} \\
&\leq \frac{CMd\mu^b}{\omega} \\
&\leq \frac{C\mu^b}{\omega}
\end{aligned}$$

$$\|q(t)\|_{\mathrm{L}^p} \leq \frac{C\mu^b}{\omega}$$

(Les estimations (4.12),(4.16) ,(4.17) et l'inégalité de Hölder sont utilisées) □

Lemme 4.2.9. *(ϑ_c et q_c sont des nombres réels très petits)*

$$\begin{aligned}
|\vartheta_c(t)| &\leq C\mu^{-b} \\
|q_c(t)| &\leq C\omega^{-1}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Démonstration. Les termes correcteurs ϑ_c et q_c sont bornées par la norme L^1 de ϑ et q. En effet,

$$\begin{aligned}
\vartheta_c(t) &= -\!\!\!\!\!\!\int \vartheta(t)dt \\
|\vartheta_c(t)| &\leq -\!\!\!\!\!\!\int |\vartheta(t)|dt \\
&= \|\vartheta(t)\|_{\mathrm{L}^1} \\
\vartheta_c(t) &\leq \|\vartheta(t)\|_{\mathrm{L}^1} \\
&\leq \sum_j \|a_j(t)\|_{\mathrm{L}^\infty} \|\theta^j(t)\|_{\mathrm{L}^1} \\
&= \sum_j \|a_j(t)\|_{C^0} \|\theta^j(t)\|_{\mathrm{L}^1} \\
&\leq \sum_j \frac{CM\mu^{-b}}{2d} \\
&\leq C\mu^{-b} \\
|\vartheta_c(t)| &\leq C\mu^{-b}, \\
q_c(t) &= -\!\!\!\!\!\!\int q(t)dt \\
|q_c(t)| &\leq -\!\!\!\!\!\!\int |\vartheta(t)|dt \\
&= \|q(t)\|_{\mathrm{L}^1} \\
q_c(t) &\leq \|q(t)\|_{\mathrm{L}^1} \\
&\leq \sum_{j=1}^{d} \|a_j(t)b_j(t)\|_{C^0} \|Q^j(t)\|_{\mathrm{L}^1} \\
&\leq C\|Q^j(t)\|_{\mathrm{L}^1} \\
&\leq \frac{CM}{\omega} \\
&\leq \frac{C}{\omega} \\
|q_c(t)| &\leq C\omega^{-1}
\end{aligned}$$

(Les relations (4.13),(4.16) ,(4.17) et l'inégalité de Hölder sont utilisées) □

Lemme 4.2.10.

$$\|w(t)\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq \frac{M}{2\eta}\|R_0(t)\|_{\mathrm{L}^1}^{\frac{1}{p'}} + \frac{C}{\lambda^{1/p'}} \tag{4.22}$$

Démonstration. Preuve identique à celle du lemme (4.1.7) □

Lemme 4.2.11.

$$\|w(t)\|_{\mathrm{W}^{1,\tilde{p}}} \leq C(\frac{\lambda\mu+\nu}{\mu^{1+\epsilon}}) \tag{4.23}$$

Démonstration. $w(t) = \sum_{j=1}^{d} b_j(t) W^j(t)$

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} &\leq \sum_{j=1}^{d} \|b_j(t) W^j(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{d} \|b_j(t)\|_{C^1} \|W^j(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{d} C \|W^j(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} \\
&\leq dCM(\frac{\lambda\mu + \nu}{\mu^{1+\epsilon}}) \\
\|w(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} &\leq C(\frac{\lambda\mu + \nu}{\mu^{1+\epsilon}})
\end{aligned}$$

(Les estimations (4.14),(4.16) ,(4.17) pour $k = 1$) □

Lemme 4.2.12. *(estimation de f_j)*
$\forall k, h \in \mathbb{N}, r \in [1, \infty]$

$$\|D^k D^h f_j(t)\|_{L^r} \leq C(\lambda\mu)^{k+h+1} \mu^{b-\frac{d}{r}} \tag{4.24}$$

Démonstration. $f_j(t) := \nabla(b_j(t)((\tilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})$

$$\begin{aligned}
\|D^k D^h f_j(t)\|_{L^r} &\leq \|f_j(t)\|_{W^{k+h,r}} \\
&\leq \|\nabla(b_j(t)((\tilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j}))\|_{W^{k+h,r}} \\
&\leq \|b_j(t)((\tilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})\|_{W^{k+h+1,r}} \\
&\leq \|b_j(t)\|_{C^{k+h+1}} \|(\tilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j}\|_{W^{k+h+1,r}} \\
&\leq C(\lambda\mu)^{k+h+1} \mu^{\frac{d}{p'} - \frac{d}{r}} \\
\|D^k D^h f_j(t)\|_{L^r} &\leq C(\lambda\mu)^{k+h+1} \mu^{b-\frac{d}{r}}
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.2.13. *(w_c est petit en $L^{p'}$)*

$$\|w_c(t)\|_{L^{p'}} \leq C[\sum_{k=1}^{N} (\frac{\lambda\mu}{\nu})^k + \frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}] \tag{4.25}$$

Démonstration. D'après le lemme (4.1.8),
$\|R_N(f,g)\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \|D^k f\|_{L^r} \|D^{-k-1} g\|_{L^s} + C_{d,p} \|D^N f\|_{L^r} \|D^{-N} g\|_{L^s}$

$w_c(t) := -\sum_j R_N(f_j(t), \psi_\nu^j)$

$$\begin{aligned}\| w_c(t)\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq& \sum_j \| R_N(f_j(t),\psi_\nu^j)\|_{\mathrm{L}^{p'}}\\ \leq& C_{d,p',N}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}(\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-k-1}\|D^k f_j(t)\|_{\mathrm{L}^{p'}}+\nu^{-N}\|D^N f_j(t)\|_{\mathrm{L}^{p'}})\\ \| w_c(t)\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq& C[\sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda\mu}{\nu})^k+\frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}]\end{aligned}$$

(Le lemme (4.2.12) pour $h=0$, $r=p'$ et l'estimation (4.12) sont utilisés)

□

Lemme 4.2.14. *(w_c est petit en $\mathrm{W}^{1,\tilde{p}}$)*

$$\| w_c(t)\|_{\mathrm{W}^{1,\tilde{p}}} \leq C(\frac{\lambda\mu+\nu}{\mu^{1+\epsilon}})[\sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda\mu}{\nu})^k+\frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}] \tag{4.26}$$

Démonstration. D'après le lemme (4.1.8),
$\|R_N(f,g)\|_{\mathrm{L}^p} \leq \sum_{k=0}^{N-1}\|D^k f\|_{\mathrm{L}^r}\|D^{-k-1}g\|_{\mathrm{L}^s}+C_{d,p}\|D^N f\|_{\mathrm{L}^r}\|D^{-N}g\|_{\mathrm{L}^s}$

$w_c(t) := -\sum_j R_N(f_j(t),\psi_\nu^j)$

$$\begin{aligned}\| w_c(t)\|_{\mathrm{L}^{\tilde{p}}} \leq& \sum_j \| R_N(f_j(t),\psi_\nu^j)\|_{\mathrm{L}^{\tilde{p}}}\\ \leq& C\mu^{b-\frac{d}{\tilde{p}}}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}(\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-k-1}\|D^k f_j(t)\|_{\mathrm{L}^{\tilde{p}}}+\nu^{-N}\|D^N f_j(t)\|_{\mathrm{L}^{\tilde{p}}})\\ \| w_c(t)\|_{\mathrm{L}^{\tilde{p}}} \leq& \frac{C}{\mu^{1+\epsilon}}[\sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda\mu}{\nu})^k+\frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}](*)\end{aligned}$$

le (ii) du lemme (4.1.8) permet d'avoir :

$$
\begin{aligned}
Dw_c(t) &= -\sum_j DR_N(f_j(t),\psi_\nu^j)\\
&= -\sum_j (R_N(Df_j(t),\psi_\nu^j) + R_N(f_j(t),D\psi_\nu^j))\\
\|Dw_c(t)\|_{L^{\tilde p}} &\le \sum_j (\|R_N(Df_j(t),\psi_\nu^j)\|_{L^{\tilde p}} + \|R_N(f_j(t),D\psi_\nu^j)\|_{L^{\tilde p}})\\
&\le \mu^{b-\frac{d}{\tilde p}}\|\psi\|_{L^\infty}(\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-k-1}\|D^kDf_j(t)\|_{L^{\tilde p}} + \nu^{-N}\|D^NDf_j(t)\|_{L^{\tilde p}})\\
&+C\sum_j\|D\psi_\nu\|_{L^\infty}(\sum_{k=0}^{N-1}\nu^{-k-1}\|D^kf_j(t)\|_{L^{\tilde p}} + \nu^{-N}\|D^Nf_j(t)\|_{L^{\tilde p}})\\
&\le C[\mu^{b-\frac{d}{\tilde p}}(\sum_{k=1}^{N}\frac{(\lambda\mu)^{k+1}}{\nu^k} + \frac{(\lambda\mu)^{N+2}}{\nu^N}) + \nu\mu^{b-\frac{d}{\tilde p}}(\sum_{k=1}^{N}\frac{(\lambda\mu)^k}{\nu^k} + \frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N})]\\
&= C(\frac{\lambda\mu+\nu}{\mu^{1+\epsilon}})[\sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda\mu}{\nu})^k + \frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}]\\
\|Dw_c(t)\|_{L^{\tilde p}} &\le C(\frac{\lambda\mu+\nu}{\mu^{1+\epsilon}})[\sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda\mu}{\nu})^k + \frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}](**)
\end{aligned}
$$

(*) et (**) donne $\|w_c(t)\|_{W^{1,\tilde p}} \le C(\frac{\lambda\mu+\nu}{\mu^{1+\epsilon}})[\sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda\mu}{\nu})^k + \frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}]$

(Le lemme (4.2.12) pour $h = 0$, $r = \tilde p$, l'estimation (4.12) sont utilisés et le changement de variable $k = k+1$ dans la majoration de $\|Dw_c(t)\|_{L^{\tilde p}}$) □

4.3 Définition d'un nouveau champ R_1

4.3.1 Définition de R_1

Compte tenu des perturbations définies dans le chapitre précédent, il nous faut trouver un champ de vecteur R_1 pour lequel (ρ_1, u_1, R_1) soit solution de (14) sur $[0,T]\times\mathbb{T}^d$.

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div} R_1 &= \partial_t\rho_1 + \operatorname{div}(\rho_1 u_1)\\
&= \partial_t\rho_0 + \operatorname{div}(\rho_0 u_0) + \partial_t(\vartheta+\vartheta_c+q+q_c) + \operatorname{div}(\rho_0(w+w_c)) + \operatorname{div}((\vartheta+q)u_0)\\
&+ \operatorname{div}((\vartheta+q)(w+w_c)) + (\vartheta_c+q_c)\operatorname{div}(u_0+w+w_c)\\
&= -\operatorname{div} R_0 + \partial_t(\vartheta+\vartheta_c+q+q_c) + \operatorname{div}(\rho_0(w+w_c)) + \operatorname{div}((\vartheta+q)u_0)\\
&+ \operatorname{div}((\vartheta+q)(w+w_c)) + (\vartheta_c+q_c)\operatorname{div}(u_0+w+w_c)\\
&= -\operatorname{div} R_0 + \partial_t(\vartheta+\vartheta_c+q+q_c) + \operatorname{div}(\rho_0(w+w_c)) + \operatorname{div}((\vartheta+q)u_0)\\
&+ \operatorname{div}((\vartheta+q)(w+w_c))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_t(q+q_c) + \operatorname{div}(\vartheta w - R_0)\\
&+ \partial_t(\vartheta+\vartheta_c) + \operatorname{div}(\rho_0 w + \vartheta u_0) \qquad (6.1)\\
&+ \operatorname{div}(q(u_0+w))\\
&+ \operatorname{div}((\rho_0+\vartheta+q)w_c)
\end{aligned}
$$

Nous analyserons chaque ligne de (4.27) séparément et nous définirons en, les applications $R^{\chi}, R^{time,1}, R^{tin}$
, telles que :

$$
\begin{aligned}
\partial_t(q+q_c)+\mathrm{div}(\vartheta w-R_0) &= \mathrm{div}\, R^{time,1}+\mathrm{div}\, R^{quadr}+\mathrm{div}\, R^{\chi},\\
\partial_t(\vartheta+\vartheta_c)+\mathrm{div}(\rho_0 w+\vartheta u_0) &= \mathrm{div}\, R^{time,2}+\mathrm{div}\, R^{lin},\\
\mathrm{div}(q(u_0+w)) &= \mathrm{div}\, R^{q},\\
\mathrm{div}((\rho_0+\vartheta+q)\,w_c) &= \mathrm{div}\, R^{corr},
\end{aligned}
$$

et que

$$-\mathrm{div}\, R_1 := \partial_t \rho_1 + \mathrm{div}(\rho_1 u_1)$$

,
donc

$$-R_1 := R^{time,1}+R^{quadr}+R^{\chi}+R^{time,2}+R^{lin}+R^{q}+R^{corr}$$

4.3.2 Analyse de la première ligne de (5.1)

$$R_o = \sum_j R_o^j e_j = \sum_j (1-\chi_j^2) R_o^j e_j + \sum_j \chi_j^2 R_o^j e_j$$

et ainsi,

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{div}\, R_o &= \mathrm{div}(R^{\chi} - \sum_j \chi_j^2 R_o^j e_j)\\
&= \mathrm{div}\, R^{\chi} - \sum_j \nabla(\chi_j^2 R_o^j)\cdot e_j\\
&= \mathrm{div}\, R^{\chi} - \sum_j \nabla(a_j b_j)\cdot e_j
\end{aligned}
$$

où nous posons,

$$R^{\chi} := -\sum_j (1-\chi_j^2) R_o^j e_j. \tag{4.27}$$

D'après (4.17),

$$\vartheta\omega = \sum_j a_j b_j \Theta^j W^j = \sum_j \chi_j^2 R_o^j \Theta^j W^j \tag{4.28}$$

donc,

$$\mathrm{div}(\vartheta\omega) = \sum_j a_j b_j\, \mathrm{div}(\Theta^j W^j) + \nabla(a_j b_j)\cdot \Theta^j W^j$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vartheta\omega - R_o) &= \sum_j a_j b_j \operatorname{div}(\Theta^j W^j) + \nabla(a_j b_j)\cdot\Theta^j W^j + \operatorname{div} R^\chi - \sum_j \nabla(a_j b_j)\cdot e_j \\
&= \sum_j a_j b_j \operatorname{div}(\Theta^j W^j) + \nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j] \\
&= \sum_j a_j b_j \operatorname{div}(\Theta^j W^j) + \nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j] + \operatorname{div} R^\chi \\
&= \sum_j a_j b_j \operatorname{div}(\Theta^j W^j) \\
&+ (\nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j] - \fint \nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j]) \\
&+ \fint \nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j] \\
&+ \operatorname{div} R^\chi.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\partial_t(q+q_c) &= \sum_j a_j b_j \partial_t Q^j + \partial_t(a_j b_j) Q^j + q_c \\
&= \sum_j a_j b_j \partial_t Q^j + (\partial_t(a_j b_j)Q^j - \fint \partial_t(a_j b_j)Q^j) + (\fint \partial_t(a_j b_j)Q^j + q_c)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

En mettant ensemble (4.29) et (4.30) nous avons

$$\begin{aligned}
\partial_t(q+q_c) + \operatorname{div}(\vartheta\omega - R_o) &= \sum_j a_j b_j \underbrace{[\partial_t Q^j + \operatorname{div}(\Theta^j W^j)]}_{=0 \text{ par } (4.15)} \\
&+ (\partial_t(a_j b_j)Q^j - \fint \partial_t(a_j b_j)Q^j) \\
&+ (\nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j] - \fint \nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j]) \\
&+ \operatorname{div} R^\chi \\
&+ \underbrace{\fint \partial_t(a_j b_j)Q^j + q_c + \fint \nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j]}_{=0} \\
&= \sum_j (\partial_t(a_j b_j)Q^j - \fint \partial_t(a_j b_j)Q^j) \\
&+ \nabla(a_j b_j)] - \fint \nabla(a_j b_j)\cdot[\Theta^j W^j - e_j] \\
&+ \operatorname{div} R^\chi \\
&= \operatorname{div} R^{time,1} + \operatorname{div} R^{quadr} + \operatorname{div} R^\chi,
\end{aligned}$$

Avec $R^{time,1}$ définie par,

$$:= \sum_j \{\mathscr{D}^{-1}(\partial_t(a_j b_j)Q^j - \fint_{\mathbb{T}^d} \partial_t(a_j b_j)Q^j)\}, \tag{4.31}$$

et R^{quadr} est définie comme suit

$$\operatorname{div} R^{quadr} = \sum_j \{\nabla(a_j b_j) \cdot [\Theta^j W^j - e_j] - \fint \nabla R_o^j \cdot [\Theta^j W^j - e_j]\} \tag{4.32}$$

Calculons d'abord $\nabla(a_j b_j) \cdot [\Theta^j W^j - e_j]$

$$\begin{aligned}
\nabla(a_j b_j) \cdot [\Theta^j W^j - e_j] &= \nabla(a_j b_j) \cdot [(\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j} (\psi_\nu^j)^2 - 1] e_j \\
&= \nabla(a_j b_j) \cdot [(\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j} ((\psi_\nu^j)^2 - 1) + ((\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j} - 1)] e_j \\
&= \nabla(a_j b_j) \cdot [(\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j} ((\psi_\nu^j)^2 - 1)_\nu + (\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j - 1)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j}] e_j \\
&= \partial_j (a_j b_j) \cdot [(\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j} ((\psi_\nu^j)^2 - 1)_\nu + (\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j - 1)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j}].
\end{aligned}$$

Alors $R^{quadr,1}$ et $R^{quadr,2}$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
R^{quadr,1} &:= \sum_j \mathscr{R}_1(\partial_j (a_j b_j)(\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j}, ((\psi_\nu^j)^2 - 1)_\nu), \\
R^{quadr,2} &:= \sum_j \mathscr{R}_1(\partial_j (a_j b_j), (\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j - 1)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j})
\end{aligned}$$

avec le point i) du lemme (4.4) et du fait que

$$\fint_{\mathbb{T}^d} ((\psi^j)^2 - 1)_\nu = 0, \fint_{\mathbb{T}^d} (\varphi_\mu^j \widetilde{\varphi}_\mu^j - 1)_\lambda \circ \tau_{\omega t e_j} = 0,$$

nous avons,

$$R^{quadr} := R^{quadr,1} + R^{quadr,2}, \tag{4.33}$$

Nous allons donc estimer R^χ, $R^{time,1}$, R^{quadr}.

Lemme 4.3.1.

$$\|R^\chi(t)\|_{L^1} \leq \frac{\delta}{2}. \tag{4.34}$$

Démonstration. De la définition de χ_j nous avons $|R_o^j(t,x)| \leq \frac{\delta}{2d}$ sur le support de $(1 - \chi_j^2(t,x))$, donc

$$\|R^\chi(t)\|_{Ł^1} \leq \sum_j \int_{spt(1-\chi_j^2(t))} |R_o^j(t,x)| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\delta}{2d} \leq \frac{\delta}{2}.$$

□

Lemme 4.3.2.

$$\|R^{time,1}(t)\|_{Ł^1} \leq C \frac{1}{\omega}. \tag{4.35}$$

Démonstration. En utilisant (4.30) et le (4.13) et Hölder, nous avons

$$\begin{aligned}
\|R^{time,1}(t)\|_{Ł^1} &\leq C\sum_j \|\partial_t(a_j(t)b_j(t))Q^j(t)\|_{Ł^1}\\
&\leq C\sum_j \|\partial_t(a_jb_j)Q^j(t)\|_{C^0}\|Q^j(t)\|_{Ł^1}\\
&\leq C\frac{1}{\omega}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.3.3.

$$\|R^{quadr}(t)\|_{L^1} \leq C(\frac{\lambda\mu}{\nu}+\frac{1}{\lambda}). \tag{4.36}$$

Démonstration. D'après le lemme (4.1.8) pour N=1 et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|R^{quadr}(t)\|_{Ł^1} &\leq \frac{C}{\nu}\|\psi^2-1\|_{C^0}(\|\partial_j(a_j(t)b_j(t))(\varphi^j_\mu\widetilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j}\|_{Ł^1}\\
&+\|D^1(\partial_j(a_j(t)b_j(t))(\varphi^j_\mu\widetilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j})\|_{Ł^1})\\
&\leq \frac{C}{\nu}(\|\partial_j(a_j(t)b_j(t))\|_{C^o}\|(\varphi^j_\mu\widetilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j}\|_{Ł^1}\\
&+\|\partial_j(a_j(t)b_j(t))\|_{C^1}\|(\varphi^j_\mu\widetilde{\varphi}^j_\mu)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j}\|_{\mathrm{W}^{1,1}})\\
&\leq \frac{C}{\nu}\|a_jb_j\|_{C^2}(\|\varphi^j_\mu\widetilde{\varphi}^j_\mu\|_{L^1}+\lambda\|\varphi^j_\mu\widetilde{\varphi}^j_\mu\|_{\mathrm{W}^{1,1}})\\
&\leq \frac{C\lambda\mu}{\nu},
\end{aligned}$$

D'après le lemme (4.1.8) pour N=1 et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|R^{quadr,2}(t)\|_{Ł^1} &\leq C\|\varphi^j_\mu\widetilde{\varphi}^j_\mu-1\|_{Ł^1}(\frac{1}{\lambda}\|\partial_j(\chi^2_jR^j_o)\|_{C^o}+\frac{1}{\lambda}\|\partial_j(\chi^2_jR^j_o)\|_{C^1})\\
&\leq C\frac{1}{\lambda},
\end{aligned}$$

car $\|\varphi^j_\mu\widetilde{\varphi}^j_\mu\|_{Ł^1}=1$ □

4.3.3 Analyse de la deuxième ligne de (5.1)

Nous avons

$$\begin{aligned}\partial_t(\vartheta+\vartheta_c)+\operatorname{div}(\vartheta u_o+\rho_o\omega) &= \sum_j a_j\partial_t\Theta^j+(\partial_t a_j)\Theta^j+\operatorname{div}(\vartheta u_o+\rho_o\omega)+\vartheta_c\\ &= \sum_j (a_j\partial_t\Theta^j-\fint a_j\partial_t\Theta^j)\\ &+((\partial_t a_j)\Theta^j-\fint(\partial_t a_j)\Theta^j)+\operatorname{div}(\vartheta u_o+\rho_o\omega)\\ &+ \underbrace{\fint a_j\partial_t\Theta^j+\fint(\partial_t a_j)\Theta^j+\vartheta_c}_{=0 \text{ car fonctions à valeur moyenne nulle}}\\ &= \operatorname{div}R^{time,2}+\operatorname{div}R^{lin},\end{aligned}$$

où,

$$R^{lin} := \mathscr{D}^{-1}((\partial_t a_j)\Theta^j-\fint a_j\partial_t\Theta^j)+\vartheta u_o+\rho_o\omega, \tag{4.37}$$

et $R^{time,2}$ est définie comme suit

$$\operatorname{div}R^{time,2}=\sum_j(a_j\partial_t\Theta^j-\fint a_j\partial_t\Theta^j),$$

de la relation (4.2.4) , nous avons

$$a_j\partial_t\Theta^j=-\lambda\omega a_j((\partial_j\varphi_\mu^j)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j})\psi_\nu^j$$

ainsi,

$$R^{time,2} := -\lambda\omega\sum_j\mathscr{R}_N(a_j(\partial_j\varphi_\mu^j)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j},\psi_\nu^j), \tag{4.38}$$

Lemme 4.3.4.

$$\|R^{lin}(t)\|_{Ł^1}\le C(\frac{1}{\mu^a}+\frac{1}{\mu^b}) \tag{4.39}$$

Démonstration. Proof. D'après le lemme (4.13) et de l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\|\mathscr{D}^{-1}(\partial_j a_j(t)\Theta^j(t)-\fint\partial_j a_j(t)\Theta^j(t))\|_{Ł^1} &\le C\|\partial_j a_j(t)\Theta^j(t)\|_{Ł^1}\\ &\le C\|\partial_t a_j\|_{C^0}\|\Theta^j(t)\|_{Ł^1}\\ &\le \frac{C}{\mu^b}.\end{aligned}$$

pour le second terme de la définition de (5.11), nous avons

$$\begin{aligned}\|\rho_0(t)\omega(t)\|_{Ł^1} &\leq \|\rho_0\|_{C^0}\|a_j\|_{C^0}\|W^j(t)\|_{Ł^1}\\ &\leq \frac{C}{\mu^a}.\end{aligned}$$

même chose pour le troisième terme,

$$\|\vartheta(t)u_0(t)\|_{L^1} \leq \frac{C}{\mu^b}.$$

La somme des trois majorations donne le résultat

□

Lemme 4.3.5.

$$\|R^{time,2}(t)\| \leq C\frac{\omega}{\mu^b}(\sum_{k=1}^{N}(\frac{\lambda\mu}{\nu})^k + \frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}). \tag{4.40}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\|R^{time,2}(t)\|_{L^1} &\leq C\lambda\omega(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\nu^{k+1}}\|\mathscr{D}^k(a_j(t)(\partial_j\psi_\nu^j)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j})\|_{L^1} + \frac{1}{\nu^N}\|\mathscr{D}^N(a_j(t)(\partial_j\psi_\nu^j)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j})\|_{L^1})\\
&\leq C\lambda\omega(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\nu^{k+1}}\|(a_j(t)(\partial_j\psi_\nu^j)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j})\|_{W^{k,1}} + \frac{1}{\nu^N}\|(a_j(t)(\partial_j\psi_\nu^j)_\lambda\circ\tau_{\omega te_j})\|_{W^{N,1}})\\
&\leq C\lambda\omega(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\nu^{k+1}}\|a_j\|_{C^k}\|(\partial_j\psi_\nu^j)_\lambda\|_{W^{k,1}} + \frac{1}{\nu^N}\|a_j\|_{C^N}\|(\|\partial_j\psi_\nu^j)_{\lambda_{W^{N,1}}}\\
&\leq C\lambda\omega(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(\partial_j\psi_\nu^j)_{\lambda_{W^{k,1}}}}{\nu^{k+1}} + \frac{(\partial_j\psi_\nu^j)_{\lambda_{W^{N,1}}}}{\nu^N})\\
&\leq C\lambda\mu^{1-b}\omega(\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{(\lambda\nu)^k}{\nu^{k+1}}) + \frac{(\lambda\nu)^N}{\nu^N})\\
&\leq C\frac{\omega}{\mu^b}(\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{\lambda\nu}{\nu})^k + \frac{(\lambda\nu)^{N+1}}{\nu^N}),\\
\|R^{time,2}(t)\|_{L^1} &\leq C\frac{\omega}{\mu^b}(\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{\lambda\nu}{\nu})^k + \frac{(\lambda\nu)^{N+1}}{\nu^N})\end{aligned}$$

4.3.4 Analyse de la troisième ligne de (5.1)

Pour des raisons de simplicité, nous posons :

$$R^q := q(u_o + w).$$

□

Lemme 4.3.6.

$$\|R^q(t)\|_{L^1} \leq C\frac{\mu^b}{\omega}. \tag{4.41}$$

Démonstration. Par définition de q et w nous avons

$$\begin{aligned}
\|R^q(t)\|_{\mathrm{L}^1} &\leq \|q(t)\|_{\mathrm{L}^1}\left(\|u_0(t)\|_{\mathrm{C}^0} + \|w_0(t)\|_{\mathrm{C}^0}\right)\\
&\leq \sum_j \|a_j b_j\|_{\mathrm{C}^0} Q^j(t)_{\mathrm{L}^1}\left(\|u_0(t)\|_{\mathrm{C}^0} + \sum_i \|a_i\|_{\mathrm{C}^0}\|W^i(t)\|_{\mathrm{C}^0}\right)\\
&\leq C\sum_j \|Q^j(t)\|_{\mathrm{L}^1}\left(1 + \sum_i \|a_i\|_{\mathrm{C}^0}\|W^i(t)\|_{\mathrm{C}^0}\right)\\
(par (4.13), (4.14)) &\leq \frac{C}{\omega}(1+\mu^b),
\end{aligned}$$

□

4.3.5 Analyse de la quatrième ligne de (5.1)

$$R^{corr} := (\rho_0 + v + q)\, w_c$$

Lemme 4.3.7. *(R^{corr} est borné en L^1)*

$$\|R^{corr}(t)\|_{\mathrm{L}^1} \leq C\left(1 + \frac{1}{\lambda^{1/p}} + \frac{\mu^b}{\omega}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\right)^k + \frac{(\lambda\mu)^{N+1}}{\nu^N}\right).$$

Démonstration. Cette inégalité est une conséquence directe de (4.19),(4.20),(4.25) □

CHAPITRE 5

PREUVE DE LA PROPOSITION PRINCIPALE

Compte tenu des estimations prouvées dans les chapitres 4 et 5, nous allons maintenant prouvé la Proposition (3.2.1) Soit $p \in (1,\infty)$ et $\tilde{p} \in [1,\infty)$ tel que (3.1) . Soit $\delta, \eta > 0$ et soit

$$(\rho_0, u_0, R_0) : [0,T] \times \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

une solution lisse l'équation de continuité-défaut incompressible (2.1).

5.1 Choix des paramètres

Rappelons la constante M définie en (4.11) et ϵ positif défini en (4.10). Rappelons que $a = d/p > 0$ et $b = d/p' > 0$.Pour un certain grand entier λ à définir plus tard :

(1) $\mu := \lambda^{\alpha}$ pour un certain $\alpha(\epsilon) > \epsilon^{-1} > \epsilon^{-1}$.

(2) $\nu := \lambda^{\gamma}$ pour un nombre entier naturel $\gamma(\alpha,\epsilon)$ choisi tel que

$$\alpha + 1 < \gamma < \alpha(1+\epsilon)$$

. Son existence est possible par le choix de α. De cette façon, ν est un multiple de λ.

(3) On choisi $\beta(b,\alpha,\gamma)$ tel que

$$b\alpha < \beta < b\alpha + \gamma - (\alpha + 1)$$

Son existence est aussi possible par la première condition sur γ, et on défini un $\omega := \lambda^{\beta}$.

(4) On choisi un entier $N(\alpha,\gamma)$ assez grand tel que

$$\frac{N}{N+1} < \frac{\gamma}{1+\alpha}$$

grace à la première condition sur γ.

Nous résumons ici les conditions imposées par le choix de nos paramètres α, β, γ et N :

$$1 < \alpha\epsilon \tag{5.1}$$

$$\alpha + 1 < \gamma \tag{5.2}$$

$$\gamma < \alpha(1+\epsilon) \tag{5.3}$$

$$b\alpha < \beta \tag{5.4}$$

$$\beta + 1 + \alpha < b\alpha + \gamma \tag{5.5}$$

$$N(1+\alpha) < (N-1)\gamma. \tag{5.6}$$

5.1.1 Définition d'une nouvelle solution

Soient (ρ_1, u_1) définie dans la section 4 et R_1 dans la section 5. Alors (ρ_1, u_1, R_1) est une solution de (3.3) comme indiqué dans la construction de R_1. Cette solution est lisse car (χ_j) est lisse et égale à $(\rho_0, u_0, R_0)(t)$ si $R_0(t) \equiv 0$. Par la définition de la fonction χ_j il est clair que

$$R_0(t) \equiv 0 \implies \partial_t a_j = \partial_t \left(\chi_j(t,.)\|R_0^j(t,.)\|^{1/p}\right) \equiv 0$$

de même pour $\partial_t(a_j b_j)$, donc $R^{lin}(t)$, $R^{time,1}(t) \equiv 0$. Nous voulons montrer (1)-(4) qui est équivalent à

$$\|\vartheta(t) + q(t) + \vartheta_c(t) + q_c(t)\|_{L^p} \le M\eta \|R_0(t)\|_{L^1}^{1/p} \tag{5.7}$$

$$\|w(t) + w_c(t)\|_{L^{p'}} \le \frac{M}{\eta} \|R_0(t)\|_{L^1}^{1/p'} \tag{5.8}$$

$$\|w(t) + w_c(t)\|_{W^{1,\tilde{p}}} \le \delta \tag{5.9}$$

$$\|\left(R^{time,1} + R^{quadr} + R^{\chi} + R^{time,2} + R^{lin} + R^{q} + R^{corr}\right)(t)\|_{L^1} \le \delta \tag{5.10}$$

Remarque 5.1.1. *Dans toutes les définitions, le paramètre d'oscillation $\lambda \in \mathbb{N}$ reste à fixé. Il sera suffisamment choisi grand dans toutes les estimations faites.*

5.1.2 Estimations sur les perturbations

Soit l'ensemble

$$A := \{t \in [0,T] : \|R_0(t)\|_{L^\infty} < \delta/4d\}, \qquad B := [0,T] \setminus A.$$

puisque R_0, est une fonction continue alors A est un ouvert de $[0,T]$ et donc, B est un compact. Ainsi,

$$\inf_{t\in B} \|R_0(t)\|_{L^1} = \min_{t\in B} \|R_0(t)\|_{L^1} > 0$$

Si $t \in A$, then $\chi_j(t) \equiv 0$ (par définition de $\chi_j(t)$), alors par définition des perturbations, $\vartheta(t) = q(t) = \vartheta_c(t) = w(t) = w_c(t) = 0$. Par conséquent,(5.7) est triviale. Si $t \in B$, d'après les lemmes (4.2.8),(4.2.7),(4.2.9), nous avons

$$\begin{aligned}
\|\vartheta(t) + q(t) + \vartheta_c(t) + q_c(t)\|_{L^p} &\le \|\vartheta(t)\|_{L^p} + \|q(t)\|_{L^p} + |\vartheta_c(t)| + |q_c(t)| \\
&\le \frac{M\eta}{2} \|R_0(t)\|_{L^1}^{1/p} + C\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}} + \frac{\mu^b}{\omega} + \frac{1}{\mu^b} + \frac{1}{\omega}\right) \\
&= \frac{M\eta}{2} \|R_0(t)\|_{L^1}^{1/p} + C\left(\lambda^{-1/p} + \lambda^{b^\alpha - \beta} + \lambda^{-b^\alpha} + \lambda^{-\beta}\right).
\end{aligned}$$

En raison de (5.1) et du fait que $p < \infty$ and $b > 0$ la seconde sommation peut etre rendu arbitrairement petite en choisissant λ suffisamment grand. Plus précisément on peut choisir λ tel que

$$C\left(\lambda^{-1/p} + \lambda^{b^\alpha-\beta} + \lambda^{-b^\alpha} + \lambda^{-\beta}\right) \le \frac{M\eta}{2} \min_{t\in B} \|R_0(t)\|_{\mathrm{L}^1}^{1/p},$$

ce qui prouve en particulier (5.7). Notons que, prendre le minimum de $\|R_0(t)\|_{\mathrm{L}^1}$, nous rassure que λ est choisi indépendant de t.

Pour montrer (5.8), nous utilisons les Lemmes (4.22) et (4.23) .

$$\begin{aligned}\|w(t) + w_c(t)\|_{L^{p'}} &\le \frac{M}{2\eta} \min_{t\in B} \|R_0(t)\|_{L^1}^{1/p'} + C\left(\frac{1}{\lambda^{1/p'}} + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\mu\lambda}{\nu}\right)^k + \frac{(\mu\lambda)^{N+1}}{\nu^N}\right)\\ &= \frac{M}{2\eta} \min_{t\in B} \|R_0(t)\|_{L^1}^{1/p'} + C\left(\lambda^{-1/p'} + \sum_{k=1}^{N}(\lambda^{1+\alpha-\gamma})^k + \lambda^{(N+1)(1+\alpha)-N\gamma}\right)\end{aligned}$$

Parce que de (5.2), nous avons $\lambda^{1+\alpha-\gamma} < 1$, donc la somme entre parenthèse est bornée par $N\lambda^{1+\alpha-\gamma}$. En outre,

$$(N+1)(1+\alpha) - N\gamma < N(1+\alpha) - (N-1)\gamma < 0$$

par (5.1), $p' < \infty$, donc tous les exposants de γ dans la parenthèse sont négatives, donc le terme peut être arbitrairement rendu petit pour un choix de λ suffisamment grand, ce qui prouve (5.8)

$$\begin{aligned}\|w(t) + w_c(t)\|_{W^{1,\tilde p}} &\le C\left(\frac{\mu\lambda+\nu}{\mu^{1+\epsilon}}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\mu\lambda}{\nu}\right)^k + \frac{(\mu\lambda)^{N+1}}{\nu^N}\right)\\ &= C\left(\lambda^{1-\alpha\epsilon} + \lambda^{\gamma-\alpha(1-\epsilon)}\right)\left(\lambda^{-1/p'} + \sum_{k=1}^{N}\lambda^{k(1+\alpha-\gamma)} + \lambda^{(N+1)(1+\alpha)-N\gamma}\right)\end{aligned}$$

Puisque de (5.2) et(5.1) chaque sommation à l'intérieur des deux parenthèses est délimitée par 1, donc l'inégalité se résume à

$$\|w(t) + w_c(t)\|_{W^{1,\tilde p}} \le C(N+2)\left(\lambda^{1-\alpha\epsilon} + \lambda^{\gamma-\alpha(1-\epsilon)}\right)$$

Les deux exposants de λ dans cette expression sont négative : le premier, par (5.1) et le second par (5.3). Par conséquent, si λ est suffisamment grand,(5.9) est prouvée.

5.1.3 Estimation des erreurs

Par le lemme(4.34) le terme correcteur R^χ est borné dans L^1 pat $\frac{\delta}{2}$ donc pour prouver (5.10) nous devons montrer que la somme de tous les autres composantes du champ défaut R_1 sont plus petites que $\frac{\delta}{2}$ dans L^1. La pluspart des termes sont analogiquement bornés aux perturbations de densité et de vitesse, par les lemmes (4.3.3),(4.3.4),(4.3.6) :

$$\begin{aligned}\|R^{quadr}\|_{L^1} &\le C\left(\lambda^{1+\alpha-\gamma} + \lambda^{-1}\right)\\ \|R^{lin}\|_{L^1} &\le C\left(\lambda^{-a\alpha} + \lambda^{-b\alpha}\right)\\ \|R^{q}\|_{L^1} &\le C\lambda^{-b\alpha-\beta}\\ \|R^{time,1}\|_{L^1} &\le C\lambda^{-\beta}\end{aligned}$$

Ces termes sont petits pour les λ grands. D'après le lemme (4.3.7) nous avons ce qui suit :

$$\|R^{corr}\|_{L^1} \leq C\left(\lambda^{b\alpha-\beta}+\lambda^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda^{k(1+\alpha-\gamma)}+\lambda^{(N+1)(1+\alpha)-N\gamma}\right)$$

Par (5.4), le terme entre les premières parenthèses est borné par 3 , le second est petit pour λ grand parce que (5.2) et (5.6) par le même argument que ci-dessus dans l'estimation de la perturbation de la vitesse. Le dernier terme restant est $R^{time,2}$, qui est pris en charge par le Lemme (4.3.5) :

$$\begin{aligned}\|R^{time,2}\|_{L^1} &\leq C\lambda^{\beta-b\alpha}\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda^{k(1+\alpha-\gamma)}+\lambda^{(N+1)(1+\alpha)-N\gamma}\right)\\ &= C\lambda^{\beta+1+\alpha-(b\alpha+\gamma)}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^{k(1+\alpha-\gamma)}+\lambda^{N(1+\alpha)-(N-1)\gamma}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, (5.2) et (5.6) impliquent que la grande parenthèse est bornée par $N+1$. De plus $\beta+1+\alpha-(b\alpha+\gamma)$ est négatif à cause de (5.5), donc le terme est arbitrairement petit si λ si est choisi suffisamment grand. Ceci conclut la preuve de (4) et donc la preuve de la proposition (3.2.1) pour $p \in (1,\infty)$.

5.1.4 Preuve de la proposition(3.2.1) pour $p = 1$

Dans ce cas, $p' = \infty$ nous avons $\tilde{p} < d$ et les champs de vecteurs construits sont bornés et $\rho \in C_t L^1_x$.

La preuve de cette proposition(3.2.1) dans ce cas est bien plus délicate mais détaillée dans[MS18] `https:/arxiv.org/pdf/1806.09145(2018)`, elle nécessite une intégrabilité de la perturbation de densité ϑ qui est strictement meilleure que L^1, dans le Lemme (4.3.3) : la petitesse du terme $\|\vartheta u_0\|_{L^1}$ est impossible dans la construction de la pertubation telle que présentée dans les sections précédentes. Dans [**?**] le meme problème a été résolu en laissant les densités de Mikado se déformer avec l'écoulement de sorte que le terme de transport dans la partie linéaire de R_1,

$$divR^{transport} = (\partial_t + u_0.\nabla)\left(\vartheta - \int_{\mathbb{T}^d}\vartheta\right)$$

est suffisament petit à cause de l'annulation de fonction de Mikado. Plus précisement, puisque u_0 is lisse, il existe une une fonction lisse appelé flow inverse Φ définie : $[0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ et qui résous

$$\partial_t\Phi + u_0.\nabla\Phi = 0, \Phi(t_0,x) = x$$

De plus, $\Phi(t,) : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ est proche de l'identité lorsque t est plus proche de 0. Dans [MS18], les perturbations sont maintenant définies en utilisant le pushforward de la densité et de l'écoulement de Mikado. En ignorant le correcteur et les seuils, les perturbations de densité localement dans le teemps ont la représentation

$$\vartheta(t,x) = \eta\sum_j R_0^j(t,x)\Theta^j_{\lambda,\mu}(\Phi(t,x))$$

A partir de cette définition, le terme de transport dans le nouveau champ de défaut est réduit à :

$$(\partial_t + u_0(t,x).\nabla)\,\vartheta(t,x) = \eta\sum_j \Theta^j_{\lambda,\mu}(\Phi(t,x))\,(\partial_t + u_0(t,x).\nabla)\,R_0^j(t,x),$$

dont l'antidivergence est d'ordre $1/\lambda$ dans la norme L^1 à cause de $\Theta^j_{\lambda,\mu}$. Dans la construction présentée dans la section 5, il est avantageux d'appliquer le pushforward seulement sur le facteur d'oscillation $\psi(\nu x)$ et non sur les fonctions spatio-temporelles de Mikado $\varphi^j(t,x)$. La perturbation de densité dans ce cas prend la forme :

$$\vartheta(t,x) = \eta \sum_j R_0^j(t,x)\varphi_\mu^j(\lambda(x-\omega t e_j))\psi^j(\vartheta\Phi(t,x)).$$

D'une part, le terme de transport contient également des dérivées de $(\varphi_\mu)_\lambda$, ce qui exclut la possibilité d'une estimation L^1. Ce pendant le terme est presque identique à $\partial_t\vartheta$, il est donc possible d'estimer son analogue d'antidivergence au lemme (4.3.3). D'autre part, depuis la définition des fonctions spatio-temporelles de Mikado, $\varphi^j(t,x)$ reste inchangée, nous avons encore un support disjoint de Mikado dans des directions différentes, donc il n'y aura pas de non trivial interactions (troisième problème dans la section 2 de [MS18]) qui doivent être contrôlées. Toutes les autres estimations des sections 5 et 6 restent valides sous cette redéfinition, donc la proposition peut être prouver avec p=1.

Pour la deuxieme question,notons que, dès que le champ est $\mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ (où même $\mathrm{L}^1(BV)$ localement), le résultat de DiPerna et Lions (et Ambrosio) assure aussi l'existence et l'unicité d'un flot lagrangien régulier ; et alors les solutions faibles L^p sont renormalisées donc uniques et données par ce flot si le champ a un gradient $\mathrm{L}^{p'}$. Mais les exemples construits ici montrent qu'il peut y avoir, pour ce même champ de vecteur, des solutions faibles moins intégrables non uniques et donc non données par le flot. Pour les détails techniques, voir [MS18]

CONCLUSION

Dans ce travail, Stefano Modena et ses collaborateurs ont construit une infinité de champs de vecteur Sobolev incompressibles $u \in C_t W_x^{1,\tilde{p}}$ sur le domaine périodique $\mathbb{T}^d$ pour lequel l'unicité des solutions pour l'équation de transport échoue dans la classe de densités $\rho \in C_t L_x^p$ à condition que $\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} > 1 + \frac{1}{d}$. Plusieurs approches ont été utilisées : la construction de nouvelles solutions, la définition des perturbations des densités et champs construits, les estimations classiques de ces perturbations et quelques résultats connus des travaux effectués par d'autres chercheurs de renom international sur le problème.

PERSPECTIVE

L'unicité de solution faible est démontrée dans DiPerna Lions quand $\frac{1}{p}+\frac{1}{\tilde{p}} \leq 1$, et dans ce travail, il est maintenant bien connu que, lorsque $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{\tilde{p}} > 1+\dfrac{1}{d}$ il existe une infinité de champ de vecteurs Sobolev dont l'unicité pour l'équation de transport échoue pour certaines régularités des fonctions densités et des champs construits. Il sera donc très intéressant de savoir ce qui se passera lorsque $1 < \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{\tilde{p}} \leq 1+\dfrac{1}{d}$ et de savoir aussi si la méthode d'intégration convexe utilisée par les auteurs peut être appliquée à d'autres équations aux dérivées partielles linéaire ou non dont les fonctions coefficients et inconnues sont moins réguliers en vue de prouver l'unicité de solution ou non de ces équations.

BIBLIOGRAPHIE

[B] Analyse fonctionnelle, théorie et applications-Haïm Brézis

[BB17] BIANCHINI S., BONICATTO, P. A uniqueness result for the decomposition of vector fields in $\mathbb{R}^d$ SISSA (2017) .

[BCV18] BUCKMASTER, T., COLOMBO, M., AND VICOL, V. Wild solutions of the Navier-Stokes equations whose singular sets in time have Hausdorff dimenssion strictly less than 1. *arXiv :1809.00600.*, (2018).

[BLSV17] BUCKMASTER, T., DE LELLIS, C., SZÉKELYHIDI JR, L., AND VICOL, V. Onsager's conjecture for admissible weak solutions. *arXiv :2017.*

[BV19] BUCKMASTER, T., AND VICOL, V. Nonuniqueness of weak solutions to the Naviers-Stokes equation. *Annals of Mathematics :2019.*

[CC16] CARAVENNA, L., AND CRIPPA, G. Uniqueness and Lagrangianity for solutions with lack integrability of the continuity equation. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris,* 354(12) :1168–1173, 2016.

[CC18] CARAVENNA, L., AND CRIPPA, G. A directional lipschitz extension lemma, with applications to uniqueness and Lagrangianity for the continuity equation. *arXiv :1812.06817,* 2018.

[CL19] CHESKIDOV, A., AND LUO, X. Stationary and discontinuous weak solutions of the Navier-Stokes equations *arXiv :1901.07485,* 2019.

[DS17] DANERI, S., AND SZÉKELYHIDI JR, L. Nonuniqueness and h-principle for Hölder-continuous weak solutions of the Euler equations. *Arch. Rational. Mech Anal.224(2), 471–574,* 2017.

[DEP03] DEPAUW, N. Non unicité des solutions bornées pour un champs de vecteur BV en dehors d'un hyperplan. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris,* 337(4) :249–252, 2003.

[DL89] R. J. DIPERNA AND P.-L. LIONS. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511–547, 1989.

[GT01] GILBARG, David., AND TRUDINGER, N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. *Springer-verlag Berlin Heidelberg* , 2001.

[IS16] ISETT, P. A proof of Onsager's conjecture. *arXiv (2016)*

[Amb04] LUIGI AMBROSIO. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields *Invent. math.*, 158(2) :227–260, 2004.

[Amb17] LUIGI AMBROSIO. Well posedness of ODE's and continuity equations with nonsmooth vector fields,and applications. *Rev. Math.Complut.*, 30(2) :427–450, 2017.

[LT18] LUO, T., AND TITI, E. S. Nonuniqueness of Weak Solutions to Hyperviscous Navier-Stokes equations-On Sharpness of J-L. Lions exponent. *arXiv :1808.07595(2018)*

[LU18] LUO, X. Stationary Solutionsand nonuniqueness of Weak Solutions for the Navier-Stokes equations in high dimensions. *arXiv :1807.09318, (2018)*

[MS18] MODENA, S., AND SZÉKELYHIDI JR, L. Non-renormalized solutions to the continuity equation. *arXiv :1806.009145, (2018)*

[MS18] MODENA, S., AND SZÉKELYHIDI JR, L. Non-uniqueness for the transport equation with Sobolev vector fields. *Annals of PDE 4(2), (2018)*

[MG18] MODENA, S., AND SATTIG, G. Convex integration solutions to the transport equation with full dimentional concentration. *arXiv :1902.08521v1,[math.AP] 22 Feb (2019)*